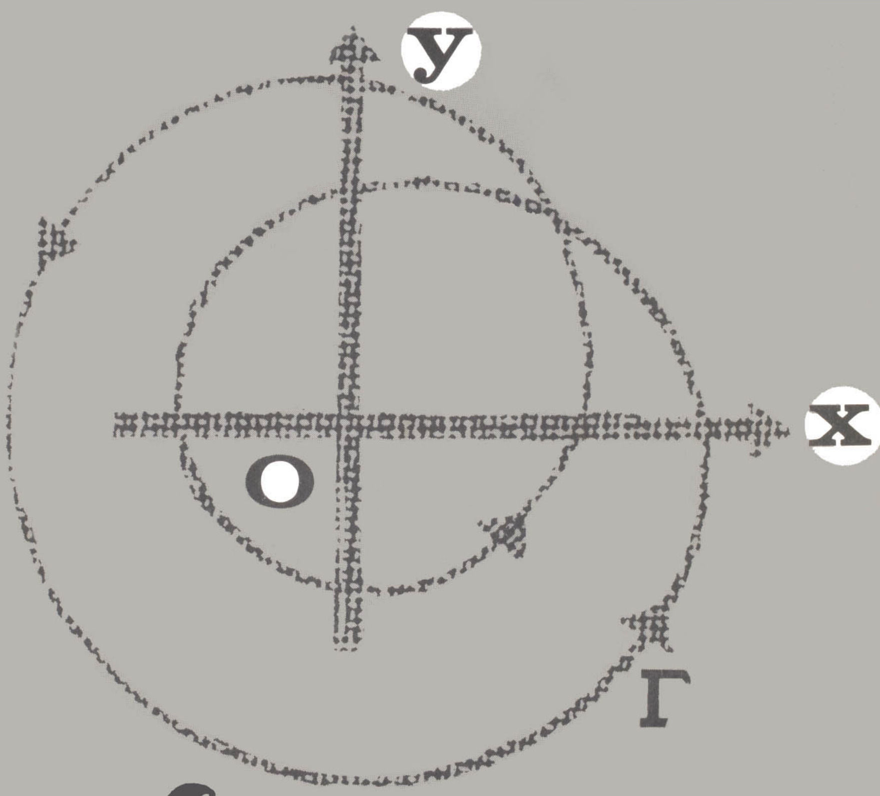
serie de matemática

monografía no. 8

FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA

Departamento de Asuntos Científicos
Unión Panamericana - Secretaría General
Organización de los Estados Americanos



$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{dz}{z} = 2$$

FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA

por

José I. Nieto

Profesor de Matemáticas de la
Universidad de Montreal
Montreal, Canadá

Departamento de Asuntos Científicos
Unión Panamericana
Secretaría General de la
Organización de los Estados Americanos
Washington, D. C. - 1968

Esta monografía ha sido preparada para su publicación en el
Departamento de Asuntos Científicos de la Unión Panamericana

Editora: Eva V. Chesneau
Asesor Técnico: Dr. Juan Horváth
Universidad de Maryland, EE. UU.

A LOS LECTORES

La colección de monografías científicas forma parte de los programas generales de información y publicaciones del Departamento de Asuntos Científicos y tiene como finalidad principal difundir y presentar de manera sencilla los nuevos temas y métodos que surgen del rápido desarrollo de las ciencias y de la tecnología.

En la actualidad la colección consta de cuatro series, en español y portugués, sobre física, química, biología y matemática, pero se contempla la posibilidad de incluir otros ramos de las ciencias.

Desde su comienzo se dedicó estas monografías a los profesores y estudiantes de ciencias de nivel secundario y universitario básico, no obstante se aspira a que encuentren también acogida entre los hombres de ciencia dedicados a la investigación especializada y el público en general que se interese en adquirir información o conocimientos sobre la materia.

En esta oportunidad, la Unión Panamericana agradece a la Agencia para el Desarrollo Internacional y a la Fundación Nacional de Ciencias de los Estados Unidos por la significativa ayuda económica recibida en apoyo de este programa, así como al doctor José I. Nieto, autor de esta monografía.

Jesse D. Perkinson
Director

INDICE

Página

Prólogo 1

CAPITULO PRIMERO. CONJUNTOS, SUCESIONES Y SERIES DE NUMEROS COMPLEJOS

§ 1. Definición y Propiedades de los Números Complejos 3
§ 2. La Topología del Plano Complejo 11
§ 3. Sucesiones y Series de Números Complejos 15

CAPITULO SEGUNDO. FUNCIONES HOLOMORFAS

§ 1. Funciones de Una Variable Compleja 29
§ 2. Funciones Continuas 31
§ 3. Funciones Holomorfas 37
§ 4. Series de Potencias 40
§ 5. Las Ecuaciones de Cauchy-Riemann 46

CAPITULO TERCERO. EL TEOREMA INTEGRAL DE CAUCHY

§ 1. Curvas e Integrales Curvilíneas 51
§ 2. El Indice de Un Camino Cerrado. Primera Demostración del Teorema Fundamental del Algebra 57
§ 3. El Teorema Integral de Cauchy 63

CAPITULO CUARTO. ANALITICIDAD DE LAS FUNCIONES HOLOMORFAS

§ 1. La Fórmula Integral de Cauchy 71
§ 2. Desarrollo de Taylor de Una Función Holomorfa 73
§ 3. El Teorema de Liouville. Segunda Demostración del Teorema Fundamental del Algebra 76

CAPITULO QUINTO. EL CALCULO DE RESIDUOS

§ 1. El Teorema de Laurent 79
§ 2. Polos y Residuos 81

§ 3. Cálculo de Integrales por el Método de los Residuos 84
§ 4. El Teorema de Rouché. Tercera Demostración del Teorema Fundamental del Algebra 85

Bibliografía.. 89

PROLOGO

Esta es una monografía sobre uno de los campos más importantes de la Matemática, en el cual se combinan la belleza de una teoría y la gran variedad de sus aplicaciones. Al principio el lector podrá tener la impresión de que la teoría es abstracta y un poco difícil. En efecto, el comienzo de todo es difícil; sin embargo, a medida que se vaya familiarizando con los nuevos conceptos e ideas se dará cuenta que aquello que, en un momento, parecía abstracto se va convirtiendo cada vez más en algo concreto y claro. La diferencia entre lo abstracto y concreto en la Matemática es puramente psicológica, y no es otra cosa que la siguiente: abstracto se llama todo aquéllo en lo cual se piensa por primera vez, que se hace concreto apenas uno se ha familiarizado con ello. Quien vea por primera vez la definición de número real, no dirá que es abstracta; sin embargo, quien que haya trabajado con los números reales, no dirá que no hay cosa tan concreta como tales números.

A fin de facilitar la comprensión del texto hemos añadido a cada capítulo un cierto número de ejemplos y ejercicios. Recomendamos muy en especial no seguir adelante sin haber resuelto previamente la mayor parte de tales ejercicios, porque su correcta solución es la piedra de toque de la medida en que se ha entendido la teoría.

Aquí damos por supuesto que el lector conoce la notación común y corriente de la teoría de conjuntos. Como de costumbre, $\in$ denota la pertenencia de un elemento a un conjunto, $\subset$ la inclusión de conjuntos y $\cup$, $\cap$ las operaciones de unión e intersección, respectivamente, de conjuntos, etc.

1

CONJUNTOS, SUCESIONES Y SERIES DE NUMEROS COMPLEJOS

§ 1. Definición y Propiedades de los Números Complejos

Sea $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales. La definición de número complejo está basada en la noción de pareja ordenada de números reales. Como es bien sabido, si a, b, c, d son elementos de $\mathbb{R}$ las parejas ordenadas (a, b), (c, d) se dicen iguales, y se escribe $(a, b) = (c, d)$, si $a = c$ y $b = d$. De esto resulta que, si $b \neq a$ $(a, b) \neq (b, a)$: como parejas ordenadas (a, b) y (b, a) son diferentes.

Sea ahora $\mathbb{C}$ el conjunto de todas las parejas ordenadas de números reales, en el cual las operaciones de adición + y multiplicación $\cdot$ están definidas por medio de las relaciones siguientes:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) \qquad [1.1]$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc) \qquad [1.2]$$

Fácilmente se verifica que las propiedades conocidas de la adición y la multiplicación de números reales se cumplen también para la adición y la multiplicación en $\mathbb{C}$, a saber:

Para todo z_1, z_2, z_3 en $\mathbb{C}$

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1 \qquad \text{(conmutatividad de la adición)} \quad [1.3]$$

$$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3 \qquad \text{(asociatividad de la adición)} \quad [1.4]$$

$$z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1 \quad \text{(conmutatividad de la multiplicación)} \quad [1.5]$$

$$z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) \quad \text{(asociatividad de la multiplicación)} \quad [1.6]$$

$$z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3 \quad \text{(propiedad distributiva)} \quad [1.7]$$

Además, existe un elemento único τ en $\mathbb{C}$, a saber $\tau = (0, 0)$, tal que

$$z + \tau = z \qquad \text{para todo } z \in \mathbb{C}, \qquad [1.8]$$

y otro elemento, también único ω, $\omega = (1, 0)$, tal que

$$z \cdot \omega = z \qquad \text{para todo } z \in \mathbb{C}. \qquad [1.9]$$

Definición 1. El conjunto $\mathbb{C}$ recibe el nombre de *conjunto de los números complejos.* Los elementos de $\mathbb{C}$ se llaman *números complejos.*

Si $z = (a, b) \in \mathbb{C}$, entonces el número real a se llama la *parte real,* y el número real b la *parte imaginaria* del número complejo z, lo cual lo expresamos por medio de la notación: $a = \mathrm{Re}(z)$, $b = \mathrm{Im}(z)$.

Los números de la forma $z = (a, 0)$ forman un subconjunto especial de $\mathbb{C}$. En efecto, existe una correspondencia biunívoca entre ese subconjunto y el conjunto $\mathbb{R}$, dada por $(a, 0) \leftrightarrow a$. Como, además, se tiene que

$$(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0) \leftrightarrow a + b$$

$$(a, 0)(b, 0) = (ab, 0) \leftrightarrow ab$$

los números complejos de la forma $(a, 0)$ se comportan con respecto a la adición y a la multiplicación como los números reales. En vista de esto, se suele *identificar* $(a, 0)$ con a, y esta identificación nos da $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, de modo que un número real resulta ser precisamente un número complejo cuya parte imaginaria es igual a cero. Por otra parte, si se denota por i el número $(0, 1)$ de [1.2] se deduce que $(0, 1)^2 = (-1, 0)$, es decir, $i^2 = -1$. El número i, llamado la *unidad imaginaria,* resulta ser la raíz cuadrada de -1. La ecuación $z^2 + 1 = 0$, que no tiene ninguna solución en $\mathbb{R}$, tiene en $\mathbb{C}$ la solución $z = i$.

Consideremos ahora un número complejo cualquiera $z = (a, b)$. Como $(a, 0) + (0, 1)(b, 0) = (a, b)$, resulta que todo z en $\mathbb{C}$ se puede representar en la forma

$$z = a + ib \qquad (a = \mathrm{Re}(z),\ b = \mathrm{Im}(z)). \qquad [1.10]$$

Debido a que el cálculo con expresiones de la forma $a + ib$ es más fácil que con parejas, es común y corriente utilizar la representación [1.10], y sin que haya lugar a confusión, el cero de los números complejos $(0, 0) = 0 + i0$ se suele denotar por 0, exactamente como el cero de los números reales.

De la definición de adición en $\mathbb{C}$ se deduce fácilmente que dados dos números complejos u, v, la ecuación $u + z = v$ tiene una, y una sola, solución $z \in \mathbb{C}$, a saber: $z = (c - a, d - b)$, si $u = (a, b)$ y $v = (c, d)$. Basados en este resultado damos la siguiente definición.

Definición 2. Dados dos números complejos u, v, el número z solución de la ecuación $u + z = v$ se llama la *diferencia de minuendo* u *y substraendo* v, y se denota por $v - u$.

Ejemplo 1. Si $u = (3, 1) = 3 + i$ y $v = (2, 5) = 2 + 5i$, entonces $v - u = (2 - 3, 5 - 1) = -1 + 4i$.

En forma semejante, dados dos números complejos u y $v \neq 0$, de la definición de multiplicación en $\mathbb{C}$ resulta que existe un solo número complejo z, solución de la ecuación $u = v \circ z$. En efecto, en virtud de [1.2], si $u = (a, b)$ y $v = (c, d) \neq 0$, se tiene $z = \left(\frac{ac + bd}{c^2 + d^2}, \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\right)$. Obsérvese que la condición $v = (c, d) \neq 0$ es equivalente a $c^2 + d^2 > 0$.

Definición 3. Dados dos números complejos u, $v \neq 0$, el *cociente* $\frac{u}{v}$ denota el número z tal que $u = v \cdot z$.

Ejemplo 2. Para $u = (4, 1)$ y $v = (2, -1)$, se tiene $\frac{u}{v} = \left(\frac{7}{5}, \frac{6}{5}\right) = \frac{1}{5}(7 + 6i)$.

Las diferentes operaciones algebraicas definidas en el conjunto de los números complejos pueden enunciarse por medio de la representación [1.10] en la forma siguiente:

$$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + (b + d)\, i \quad \text{(adición)} \qquad [1.11]$$

$$(a + ib)\,(c + id) = (ac - bd) + (ad + bc) \quad \text{(multiplicación)} \qquad [1.12]$$

$$(a + ib) - (c + di) = (a - c) + (b - c)\, i \quad \text{(substracción)} \qquad [1.13]$$

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \cdot i \quad \text{(división, si } c^2 + d^2 > 0\text{)}. \qquad [1.14]$$

Definición 4. El *conjugado* $\bar{z}$ de un número complejo $z = (a, b) = a + bi$ es el número $\bar{z} = (a, -b) = a - bi$.

La verificación de las siguientes relaciones es inmediata:

$$\overline{u + v} = \bar{u} + \bar{v} \qquad [1.15]$$

$$\overline{u \cdot v} = \bar{u} \cdot \bar{v} \qquad [1.16]$$

$$\overline{u - v} = \bar{u} - \bar{v} \qquad [1.17]$$

$$\overline{\left(\frac{u}{v}\right)} = \frac{\bar{u}}{\bar{v}} \qquad (v \neq 0) \qquad [1.18]$$

$$\bar{\bar{u}} = u \qquad [1.19]$$

$$\operatorname{Re}(u) = \frac{1}{2}(u + \bar{u}), \quad \operatorname{Im}(u) = \frac{1}{2}(u - \bar{u}) \qquad [1.20]$$

u es un número real si, y sólo si, $u = \bar{u}$. [1.21]

Definición 5. El *módulo* o *valor absoluto* $|z|$ de un número complejo $z = (a, b) = a + bi$ es el número real $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Ejemplo 3. $|3 + 4i| = \sqrt{9 + 16} = 5$.

El módulo de un número complejo tiene las siguientes propiedades:

$|z| \geq 0$, $|z| = 0$ si, y sólo si, $z = 0$ [1.22]

$$|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|, \quad |\operatorname{Im}(z)| \leq |z| \qquad [1.23]$$

$$|\bar{z}| = |-z| = |z| \qquad [1.24]$$

$$|z|^2 = z \cdot \bar{z} \qquad [1.25]$$

$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (Desigualdad del triángulo.) [1.26]

En el cálculo de números complejos es muy conveniente hacer uso de la siguiente interpretación geométrica de dichos números: al número complejo $z = (a, b)$ se le hace corresponder el punto P del plano de abscisa a y ordenada b; viceversa, a todo punto P del plano de abscisa a y ordenada b se asocia el número complejo $z = (a, b)$. Como esta correspondencia entre puntos y números es biunívoca, se suele identificar $\mathbb{C}$ con el plano, llamado por esta razón el *plano* complejo, de modo que no se hace ninguna diferencia entre el número $z = (a, b)$ y el punto $P = (a, b)$ del plano. En el plano complejo, el eje de las x (o eje de las abscisas) se llama el *eje real* y el eje de las y (o eje de las ordenadas) el *eje imaginario*. La razón de tal denominación es muy sencilla: los números reales están representados por los puntos del eje real, mientras que los puntos del eje imaginario representan números de la forma ib, $b \in \mathbb{R}$, números que reciben el nombre de imaginarios.

Es grande la importancia y utilidad de esta representación geométrica de los números complejos: el conjugado del punto z no es otra cosa que el punto simétrico de z con respecto al eje real; el módulo de un número z resulta ser la distancia (euclidiana) del punto z al origen, y la distancia entre dos puntos $z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2)$ definida por $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$, no es más que

$|z_1 - z_2|$. Esto pone en claro porqué a la relación [1.26] se le da el nombre de *desigualdad del triángulo:* si z_1, z_2, z_3 son los vértices de un triángulo, entonces [1.26], aplicada por ejemplo a $z_1 - z_2 = (z_1 - z_3) + (z_3 - z_2)$, nos da $|z_1 - z_2| \leq |z_1 - z_3| + |z_3 - z_2|$, que expresa precisamente que el lado $|z_1 - z_2|$ es menor que la suma de los otros dos: $|z_1 - z_3|$, $|z_3 - z_2|$.

Por medio de la noción de módulo se pueden describir geométricamente muchos conjuntos de números complejos. Por ejemplo, $A = \{z \mid |z - z_0| = r\}$, donde $r > 0$, es el lugar geométrico de todos los puntos z a una distancia r del centro z_0, es decir, A es la circunferencia de centro z_0 y radio r. En particular $A = \{z \mid |z| = 1\}$ es la *circunferencia unidad*, o sea la circunferencia de radio igual a 1 y de centro en el origen. Análogamente $B = \{z \mid |z - z_0| \leq r\}$ y $C = \{z \mid |z - z_0| < r\}$ representan dos círculos o discos, ambos de centro en z_0 y radio r, y tales que $B = C \cup \{z \mid |z - z_0| = r\}$.

Ejemplo 4. Supongamos que z_1, z_2, z_3 son tres números complejos tales que $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ y $z_1 + z_2 + z_3 = 0$. A continuación vamos a demostrar que z_1, z_2, z_3 son los vértices de un triángulo equilátero inscrito en la circunferencia unidad.

Como $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ expresa precisamente el hecho de que los puntos están sobre la circunferencia unidad, sólo hay que probar que $|z_1 - z_2| = |z_1 - z_3| = |z_3 - z_2|$. Mostremos, por ejemplo, $|z_1 - z_2| = |z_1 - z_3|$, o lo que es lo mismo: $|z_2 - z_1|^2 = |z_1 - z_3|^2$, lo cual a su vez puede expresarse, en virtud de [1.25], en la forma:

$$(z_2 - z_1)\,\overline{(z_2 - z_1)} = (z_1 - z_3)\,\overline{(z_1 - z_3)}. \qquad [1.27]$$

En efecto, de la relación $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ resulta que $z_1 = -(z_2 + z_3)$ y por consiguiente (utilizando $z_2 \bar{z}_2 = z_3 \bar{z}_3$)

$$\bar{z}_1 (z_3 - z_2) = \bar{z}_3 z_2 - z_3 \bar{z}_2$$

$$z_1 (\bar{z}_2 - \bar{z}_3) = \bar{z}_3 z_2 - z_3 \bar{z}_2 ,$$

de lo cual se deduce $\bar{z}_1 (z_3 - z_2) = z_1 (\bar{z}_2 - \bar{z}_3)$, que es la expresión a la cual se reduce [1.27] debido a la hipótesis que $z_1 \bar{z}_1 = z_2 \bar{z}_2 = z_3 \bar{z}_3 = 1$. En forma semejante se demuestra que $|z_1 - z_3| = |z_3 - z_2|$.

Ejemplo 5. Determinemos los puntos $z = x + iy$ del plano complejo que satisfacen la desigualdad $|z - 1| \leq 2|z + 1|$. En efecto, esta desigualdad es equivalente, para $z = (x, y)$, a la desigualdad

$$\sqrt{(x - 1)^2 + y^2} \leq 2\sqrt{(x + 1)^2 + y^2} .$$

Elevando al cuadrado y simplificando se obtiene $(x + \frac{5}{3})^2 + y^2 \geq \frac{16}{9}$, o sea $|z - z_0| \geq \frac{4}{3}$, en donde $z_0 = -\frac{5}{3}$. De esto resulta que los puntos que satisfacen $|z - 1| \leq 2|z + 1|$ son los puntos exteriores al círculo $|z - z_0| < \frac{4}{3}$, de centro $z_0 = -\frac{5}{3}$ y radio $\frac{4}{3}$.

Veamos ahora qué se entiende por la *representación polar* de los números complejos. Sea $z = x + iy$ un punto diferente de cero, es decir $r = |z| \neq 0$, y θ el ángulo, medido en radianes, formado por la dirección positiva del eje real y por el vector $\overrightarrow{Oz}$, de origen O y extremo z (véase Fig. 1). Este ángulo θ, definido a menos sólo de un múltiplo entero de 2π, se llama un argumento, $\arg(z)$, de z. Para la medición de θ, se toma como sentido positivo el sentido opuesto al del movimiento de las agujas del reloj, exactamente como en Trigonometría. Como $x = r \cos \theta$, $y = r \operatorname{sen} \theta$, todo número $z = x + iy \neq 0$ se puede escribir en la forma $z = r(\cos \theta + \operatorname{sen} \theta)$. Si del número infinito de valores de θ se toma aquél en que $-\pi < \theta \leq \pi$, llamado *argumento principal* de z, y que se denota $\operatorname{Arg}(z)$, entonces se obtiene para k entero

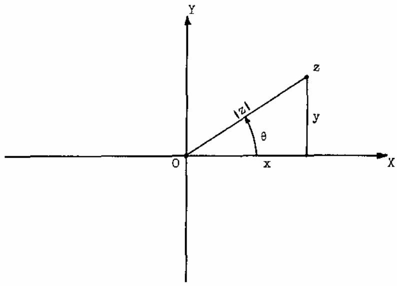


Fig. 1

$$z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) \qquad (r = |z|,\ \theta = \arg(z) = \operatorname{Arg}(z) + 2k\pi) \qquad [1.28]$$

para $z \neq 0$. Los números r, $\theta = \operatorname{Arg}(z)$, se llaman las *coordenadas polares* de z y [1.28], la *representación polar* de z.

Ejemplo 6. Para $z = 1 + i$ se tiene $\operatorname{Arg}(1 + i) = \frac{\pi}{4}$, y todos los argumentos θ de $1 + i$ están dados por la fórmula $\theta = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, en donde $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Además, $|1 + i| = \sqrt{2}$, de modo que la representación polar de $1 + i$ es $1 + i = \sqrt{2}(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$.

En la teoría de las funciones de una variable compleja, la función exponencial e^z desempeña un papel fundamental. En la definición que damos a continuación se supone conocida la función e^x, para x real.

Definición 6. Para $z = x + iy$ el valor de e^z está dado por la fórmula

$$e^z = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y) \qquad [1.29]$$

Para $z = iy$ [1.29] nos da $e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y$, ya que $e^0 = 1$. Por lo tanto, [1.28] se puede escribir en la forma

$$z = re^{i\theta} \qquad (r = |z|,\ \theta = \arg(z)). \qquad [1.30]$$

La función e^z goza de las siguientes propiedades (véase, por ejemplo, la referencia bibliográfica (2)):

$$e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1 + z_2} \qquad [1.31]$$

$$e^{-z} = \frac{1}{e^z} \qquad [1.32]$$

$$e^z \neq 0 \ \text{para todo } z \qquad [1.33]$$

$$|e^z| = e^x,\ y = \arg(e^z) \qquad (z = x + iy) \qquad [1.34]$$

$$e^z = 1 \text{ si, y sólo si, } z = 2k\pi i, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots \qquad [1.35]$$

De estas relaciones vamos a derivar algunos resultados importantes:

a) Operando por iteración en [1.31] se obtiene para n entero positivo $(e^z)^n = e^{nz}$. En particular si $z = i\theta$,

$$(e^{i\theta})^n = e^{ni\theta} \qquad \text{(Fórmula de De Moivre)} \qquad [1.36]$$

Comúnmente esta fórmula se escribe

$$(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)^n = \cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta) \qquad [1.37]$$

b) Si $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ y $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ son la representación polar respectiva de los números z_1, z_2, entonces $z_1 z_2 = (r_1 r_2) e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$ por un lado, y $z_1 z_2 = (r_1 r_2) e^{i\operatorname{Arg}(z_1 \cdot z_2)}$ por otro, de lo cual se sigue que $e^{i\operatorname{Arg}(z_1 \cdot z_2)} = e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$, expresión que es equivalente a $e^{i[\operatorname{Arg}(z_1 \cdot z_2) - (\theta_1 + \theta_2)]} = 1$. Por consiguiente, en virtud de [1.35], se tiene la fórmula

$$\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg}(z_1) + \operatorname{Arg}(z_2) + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots \qquad [1.38]$$

Conviene observar que el entero k puede ser distinto de cero, de modo que el argumento principal del producto de dos números complejos puede no ser igual a la suma de los argumentos principales de esos dos números. Por ejemplo, si $z_1 = z_2 = -1$, entonces $\operatorname{Arg}(z_1) = \operatorname{Arg}(z_2) = \pi$, y sin embargo, $\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg}(1) = 0$. En este caso el valor de k es -1.

c) $e^{z_1} = e^{z_2}$ si, y sólo si, $z_1 - z_2 = 2k\pi i$, en donde k es un entero. Esto es consecuencia de [1.35] y de la equivalencia entre $e^{z_1} = e^{z_2}$ y $e^{z_1 - z_2} = 1$.

Como una aplicación de la fórmula de De Moivre determinemos las n raíces de la ecuación $z^n = 1$, en donde n es un número entero positivo (tales raíces se llaman las n raíces enésimas de la unidad).

En primer lugar como $|z^n| = |z|^n = 1$, se tiene $|z| = 1$, y por lo tanto, toda raíz z se puede escribir $z = e^{i\theta}$, lo cual nos da, en virtud de [1.36], $e^{in\theta} = 1$. Los valores de θ que satisfacen esta ecuación se determinan por medio de [1.35]: $n\theta = 2k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Por consiguiente, $z = e^{i\theta} = e^{i2k\pi/n}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$. Del número infinito de valores de k basta sólo considerar $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, ya que los otros valores no conducen a nuevos valores de z. Por ejemplo, para $k = n+1$ el valor correspondiente de z es $z = e^{i2(n+1)\pi/n} = e^{i2\pi/n}$, que es el valor de z que corresponde a $k = 1$.

Ejemplo 7. Las tres raíces cúbicas de la unidad (caso en que $n = 3$) están dadas por la fórmula $z = e^{i2k\pi/3}$, $k = 0, 1, 2$, la cual nos da los valores $e^0 = 1$, $e^{i2\pi/3} = \cos\frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{2\pi}{3} = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})$, $e^{i4\pi/3} = \cos\frac{4\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{4\pi}{3} = \frac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3})$.

Las raíces cúbicas de la unidad gozan de una propiedad geométrica digna de ser observada. En efecto, sea $\omega = e^{i2\pi/3}$. Como $\omega^2 = e^{i4\pi/3}$, se tiene que las raíces cúbicas de la unidad son $1, \omega, \omega^2$. Por otra parte se verifica fácilmente que $1 + \omega + \omega^2 = 0$, de modo que, de acuerdo con el ejemplo 4, $1, \omega, \omega^2$ son los vértices de un triángulo equilátero inscrito en la circunferencia unidad (véase Fig. 2).

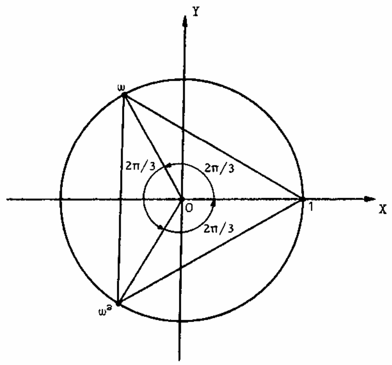


Fig. 2
Las tres raíces cúbicas de la unidad.

1) Sea $P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$ un polinomio de grado $n \geq 1$ y de coeficientes reales. Demostrar, utilizando [1.15], [1.16] y [1.21], que si α es una raíz de $P(z) = 0$, entonces $\bar{\alpha}$ lo es también.

2) Demostrar que los puntos $z = x + iy$ que satisfacen $|z + 1| \leq \leq 4 - |z - 1|$ son los puntos, bien interiores a la elipse $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ o pertenecientes a ella.

3) Demostrar la relación: $|z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2|$.

4) Probar que si z_0 es una raíz cúbica de un número z, y si 1, ω, ω^2 son las tres raíces cúbicas de la unidad, entonces z_0, $z_0\omega$, $z_0\omega^2$ son las tres raíces cúbicas de z. Pártase de este resultado para determinar las raíces cúbicas de -8.

§ 2. La Topología del Plano Complejo

Definición 1. Se llama *vecindad* de un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ todo conjunto V que contiene un círculo

$$V_\varepsilon(z_0) = \{z \mid |z - z_0| < \varepsilon\},$$

de centro z_0 y radio $\varepsilon > 0$.

El círculo $V_\varepsilon(z_0)$ es, naturalmente, una vecindad de z_0.

Definición 2. Un punto z_0 de un conjunto $S \subset \mathbb{C}$ se llama un *punto interior* a S si existe una vecindad $V_\varepsilon(z_0)$ de z_0 tal que $V_\varepsilon(z_0) \subset S$. El conjunto de todos los puntos interiores a S se llama el interior de S y se denota por $\overset{\circ}{S}$. S se llama un conjunto abierto si $S = \overset{\circ}{S}$.

En otras palabras: un conjunto S es abierto si, y sólo si, todo punto de S es un punto interior de S.

Los conjuntos abiertos satisfacen las siguientes propiedades, que le son características, y cuya demostración dejamos a cargo del lector.

Teorema 1: a) La unión de una *familia cualquiera* de conjuntos abiertos es también un conjunto abierto.

b) La intersección de un *número finito* de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.

Ejemplo 1. Toda vecindad $V_\varepsilon(z_0)$ de un punto z_0 es un conjunto abierto.

Ejemplo 2. $S = \{z \mid |z - z_0| = 1\}$ no es abierto, ya que $\overset{\circ}{S} = \emptyset$ ($\emptyset$ = conjunto vacío).

Ejemplo 3. El anillo $S = \{z \mid 1 < |z| < 2\}$ es un conjunto abierto.

Ejemplo 4. La intersección de un número infinito de conjuntos abiertos puede no ser un conjunto abierto: los conjuntos abiertos $S_n = \{z \mid |z| < 1 + \frac{1}{n}\}$ $n = 1, 2, 3, \ldots$ tienen como intersección $\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n = \{z \mid |z| \leq 1\}$, que no es un conjunto abierto.

Definición 3. Un conjunto S se llama *cerrado* si el complemento de S: $\complement S = \{z \mid z \in S\}$ es abierto.

Es conveniente observar que es posible que un conjunto sea abierto y cerrado al mismo tiempo, como lo es en el caso del conjunto vacío $\emptyset$ y del todo plano complejo $\mathbb{C}$. A su vez, un conjunto puede no ser ni abierto ni cerrado, como se demuestra a continuación:

Ejemplo 5. El anillo $S = \{z \mid 1 \leq |z| < 2\}$ no es ni abierto ni cerrado. S no es abierto, pues $S \neq \overset{\circ}{S} = \{z \mid 1 < |z| < 2\}$; por otra parte, no es cerrado, ya que el complemento de S es la unión del círculo $\{z \mid |z| < 1\}$ con el conjunto $\{z \mid |z| \geq 2\}$, y tal unión no es un conjunto abierto.

Ejemplo 6. $S = \{z \mid |z - z_0| \leq r\}$, donde $r > 0$, es cerrado, pues el complemento de S es el conjunto abierto $\{z \mid |z - z_0| > r\}$. Por esta razón, S se llama el círculo cerrado de centro z_0 y radio r a fin de distinguirlo del círculo $\{z \mid |z - z_0| < r\}$, que es abierto.

Del teorema 1 se deducen inmediatamente, tomando complementos, las siguientes propiedades, características de los conjuntos cerrados:

Teorema 2: a) La intersección de una *familia cualquiera* de conjuntos cerrados es también un conjunto cerrado.

b) La unión de un *número finito* de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.

Ejemplo 7. La unión de un número infinito de conjuntos cerrados puede no ser un conjunto cerrado: los conjuntos cerrados $S_n = \{z \mid |z| \le 1 - \frac{1}{n}\}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ tienen como unión $\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n = \{z \mid |z| < 1\}$, que no es cerrado.

Definición 4. Un punto z_0 se llama *punto de acumulación* de un conjunto S si cada vecindad $V_\varepsilon(z_0)$ contiene un punto de S *diferente* de z_0.

Obsérvese que si z_0 es un punto de acumulación de S, z_0 puede no pertenecer a S. Por otra parte, un punto z_0 de S no tiene porqué ser un punto de acumulación de S (véanse más adelante los ejemplos 8 y 9).

La definición que se acaba de dar implica que toda vecindad de un punto de acumulación de un conjunto contiene un número infinito de puntos del conjunto. En efecto, si la vecindad $|z - z_0| < \varepsilon$ contiene un punto $z_1 \neq z_0$ perteneciente a S, entonces, en forma semejante, la vecindad $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$ contendrá un punto z_2, distinto de z_1 y z_0, que pertenece a S. Repitiendo, en forma indefinida este proceso, se obtiene que la vecindad $V_\varepsilon(z_0)$ contiene un número infinito de puntos de S.

Ejemplo 8. $z = 1$ es un punto de acumulación del círculo $S = \{z \mid |z| < 1\}$, sin embargo $1 \notin S$.

Ejemplo 9. $z = 0$, aunque pertenece al conjunto $S = \{z \mid 1 < |z| < 2\} \cup \{0\}$, no es un punto de acumulación de S.

En caso de ser S cerrado, todo punto de acumulación de S pertenece a S. En efecto, si z_0 es un punto de acumulación de S, z_0 no puede estar en $\complement S$, pues $\complement S$ es abierto. Viceversa, si todo punto de acumulación de S pertenece a S, entonces todo $z_0 \in \complement S$ debe tener una vecindad $V_\varepsilon(z_0)$ tal que $V_\varepsilon(z_0) \subset \complement S$, pues de otro modo z_0 sería un punto de acumulación de S que no está en S. Por lo tanto $\complement S$ es abierto, o sea que S es cerrado.

Si denotamos con $\bar{S}$ la unión de S con el conjunto de sus puntos de acumulación, entonces el resultado anterior puede expresarse: S es cerrado si, y sólo si, $\bar{S} \subset S$. Como siempre $S \subset \bar{S}$, se obtiene:

Teorema 3. S es cerrado si, y sólo si, $S = \bar{S}$.

El conjunto $\bar{S}$ se llama la *cerradura* o la *adherencia* de S. Para un conjunto S cualquiera, $\bar{S}$ es siempre cerrado (véase ejercicio 1) y además resulta que $z \in \bar{S}$ si, y sólo si, cada vecindad de z contiene un punto de S (que puede ser z u otro punto). Véase referencia bibliográfica (4).

Definición 5. Sea A un subconjunto de un conjunto $S \subset \mathbb{C}$. A se llama *abierto* en S o *con relación* a S, si existe un conjunto abierto B tal que $A = B \cap S$.

Cuando $S = \mathbb{C}$ entonces coinciden ambas nociones de abierto y de abierto con respecto a $\mathbb{C}$. Obsérvese, además, que si $S \neq \mathbb{C}$, entonces A puede ser abierto en S sin que A en sí sea abierto.

Ejemplo 10. Sea $S = \{z \mid |z| \leq 1\}$, y A el semicírculo $A = \{z \mid |z| \leq 1,\ x > 0\}$, $(z = x + iy)$. Como $A = B \cap S$, en donde B es el semiplano derecho $B = \{z \mid x > 0\}$, que es abierto, se tiene que A es abierto en el círculo S; sin embargo A no es abierto.

Como la intersección de dos abiertos es un abierto (teorema 1), se tiene que si S es abierto, entonces A es abierto si, y sólo si, A es abierto en S.

Definición 6. Un conjunto S se llama *conexo* si no existen conjuntos no vacíos H_1, H_2 y abiertos en S, tales que:

a) $H_1 \cap H_2 = \emptyset$ (H_1, H_2 son disyuntos)

b) $H_1 \cup H_2 = S$.

Cuando S es un abierto, la condición de que H_1, H_2 sean abiertos en S se puede reemplazar por la condición de que H_1, H_2 sean abiertos.

El conjunto $\mathbb{C}$ de todos los números complejos es conexo. Asimismo, es inmediato que esto es equivalente a decir que en $\mathbb{C}$ los únicos conjuntos que son abiertos y cerrados al mismo tiempo son $\emptyset$ y $\mathbb{C}$.

Ejemplo 11. El círculo cerrado $S = \{z \mid |z| \leq 1\}$, o el círculo abierto $S = \{z \mid |z| < 1\}$, son ambos conexos.

Definición 7. Se llama *dominio* a todo conjunto abierto y conexo del plano complejo.

De esta definición resulta inmediatamente que si D es un dominio y H_1, H_2 son dos conjuntos abiertos tales que $H_1 \cap H_2 = \emptyset$, $H_1 \cup H_2 = D$, entonces por lo menos uno de ellos debe ser vacío.

Ejemplo 12. El círculo $S = \{z \mid |z - z_0| < r\}$ $(r > 0)$ es un dominio.

Ejemplo 13. Los semiplanos $A = \{z = x + iy \mid x > 0\}$, $B = \{z = x + iy \mid x < 0\}$ son ambos dominios.

Ejemplo 14. El conjunto abierto $S = \{z \mid |z| < 1\} \cup \{z \mid 2 < |z| < 3\}$ no es un dominio, ya que no es conexo.

Adoptemos la siguiente terminología: un conjunto S se llama *acotado* si existe un número $k > 0$ tal que $|z| \leq k$ para todo $z \in S$. En otras palabras, S se dice acotado si S está contenido en un círculo de centro en el origen y radio finito k.

Definición 8. Un conjunto se llama *compacto* si es a la vez cerrado y acotado.

Los teoremas siguientes expresan propiedades importantes de los conjuntos compactos. Sus demostraciones, aquí omitidas, se pueden hallar, por ejemplo, en la obra citada en la referencia bibliográfica (2).

Teorema 4 (Bolzano-Weierstrass). Un conjunto S es compacto si, y sólo si, todo subconjunto de S de un número infinito de elementos tiene un punto de acumulación en S.

Teorema 5 (Cantor). Sea $\{S_n\}$, $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ una sucesión de conjuntos compactos tales que $S_{n+1} \subset S_n$ y en donde ninguno de ellos es vacío. Entonces la intersección $\bigcap_{i=1}^{\infty} S_n$ de los S_n no es vacía.

Ejercicios

1) Demostrar: a) la cerradura $\bar{S}$ de un conjunto cualquiera S es siempre un conjunto cerrado; b) si A es un conjunto cerrado que contiene a S, entonces $A \subset \bar{S}$, es decir, $\bar{S}$ es el menor conjunto cerrado que contiene a S.

2) Mostrar que los puntos z del plano complejo que satisfacen $|z + i| < |z - 1|$ forman un dominio no acotado.

§ 3. Sucesiones y Series de Números Complejos

Sin pretender dar una definición rigurosa del concepto de sucesión (véase más adelante cap. 2, § 1, ejemplo 1), decimos que $\{z_n\}$ es una sucesión de números complejos si a cada entero positivo n $(n = 1, 2, \ldots)$ le corresponde un número complejo z_n. Dos sucesiones $\{z_n\}$, $\{w_n\}$ se consideran iguales si para cada n $z_n = w_n$. Así, pues, la sucesión $\{-1, 1, -1, 1, \ldots\}$ es diferente de la sucesión $\{1, -1, 1, -1, \ldots\}$. En efecto, la primera está definida por la relación $z_n = (-1)^n$, mientras que la segunda lo está por $w_n = (-1)^{n+1}$, de manera que $z_n \neq w_n$ para cada n.

Definición 1. Una sucesión $\{z_n\}$ se dice que *converge* a $z_0 \in \mathbb{C}$ o que tiene como *límite* z_0, lo cual se denota $\lim_{n \to \infty} z_n = z_0$, si por cada $\varepsilon > 0$ existe un número entero $N > 0$ tal que $|z_n - z_0| < \varepsilon$ para todo $n > N$.

Si la $\{z_n\}$ no converge, se dice que $\{z_n\}$ *diverge* o que $\{z_n\}$ es una sucesión divergente.

Las operaciones de adición, substracción, multiplicación y división de sucesiones se definen por medio de las siguientes relaciones:

$$\{z_n\} + \{w_n\} = \{z_n + w_n\}$$

$$\{z_n\} - \{w_n\} = \{z_n + w_n\}$$

$$\{z_n\} \cdot \{w_n\} = \{z_n \cdot w_n\}$$

$$\frac{\{z_n\}}{\{w_n\}} = \left\{\frac{z_n}{w_n}\right\}, \quad \text{si } w_n \neq 0, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Teorema 1. Si las sucesiones $\{z_n\}$ y $\{w_n\}$ son ambas convergentes, su suma, diferencia, producto y cociente (suponiendo que el límite del denominador no sea cero) son también convergentes. Además, se tiene:

a) $\lim_{n \to \infty} (z_n + w_n) = \lim_{n \to \infty} z_n + \lim_{n \to \infty} w_n$

b) $\lim_{n \to \infty} (z_n - w_n) = \lim_{n \to \infty} z_n - \lim_{n \to \infty} w_n$

c) $\lim_{n \to \infty} (z_n \cdot w_n) = (\lim_{n \to \infty} z_n) \cdot (\lim_{n \to \infty} w_n)$

d) $\lim_{n \to \infty} \left(\frac{z_n}{w_n}\right) = \dfrac{\lim_{n \to \infty} z_n}{\lim_{n \to \infty} w_n}$ (si $\lim_{n \to \infty} w_n \neq 0$).

Demostración. Sólo daremos la demostración de a). Supongamos que $\lim_{n \to \infty} z_n = z_0$, $\lim_{n \to \infty} w_n = w_0$. Lo que hay que demostrar es que, dado cualquier $\varepsilon > 0$, existe un entero $N > 0$, tal que

$$|(z_n + w_n) - (z_0 + w_0)| < \varepsilon \quad \text{para } n > N.$$

En efecto, por existir enteros $N_0 > 0$, $N_1 > 0$ tales que

$$|z_n - z_0| < \varepsilon/2, \quad \text{para } n > N_0; \quad |w_n - w_0| < \varepsilon/2, \quad \text{para } n > N_1,$$

tomando entonces como N el mayor de los dos números N_o, N_1, y haciendo uso de la desigualdad:

$$|(z_n + w_n) - (z_o + w_o)| = |(z_n - z_o) + (w_n - w_o)| \leq |z_n - z_o| + |w_n - w_o|,$$

se obtiene la conclusión deseada.

De b) y c) se deducen:

Corolario 1. Si $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = L$, se sigue que $\lim\limits_{n\to\infty} (z_n - L) = 0$.

Corolario 2. $\lim\limits_{n\to\infty} (aw_n) = a(\lim\limits_{n\to\infty} w_n)$.

En forma semejante al caso de conjuntos, se dice que una sucesión $\{z_n\}$ es *acotada* si existe un número $M > 0$ tal que $|z_n| \leq M$ para todo valor de n. Una sucesión que es acotada no tiene porqué ser a la vez convergente, como muestra el caso de la sucesión $\{(-1)^n\}$. Sin embargo, el recíproco es cierto:

Teorema 2. Toda sucesión convergente es acotada.

Demostración. Si $\{z_n\}$ converge a z_o, entonces, de acuerdo con la definición anterior para $\varepsilon = 1$, existe un número $N > 0$ correspondiente tal que todos los elementos de la sucesión, con excepción de $z_1, z_2, \ldots, z_N$, se encuentran dentro de la vecindad $V_\varepsilon(z_o)$ de z_o de radio $\varepsilon = 1$. Como el conjunto finito de números reales $\{|z_1|, |z_2|, \ldots, |z_N|, |z_o| + 1\}$ tiene un máximo $M > 0$, y como para $n > N$, $|z_n| < |z_o| + 1$, se verifica que $|z_n| \leq M$ para todo n, o sea que $\{z_n\}$ es acotada.

Teorema 3. Si la sucesión $\{z_n\}$ tiende a cero, entonces la sucesión de las medias aritméticas $\{w_n\}$:

$$w_n = \frac{z_1 + \ldots + z_n}{n}$$

tiende también a cero.

Demostración. Por hipótesis existe $N > 0$ tal que para $n > N$ $|z_n| < \varepsilon/2$. Como $w_n = \frac{z_1 + \ldots + z_N}{n} + \frac{z_{N+1} + \ldots + z_n}{n}$ se tiene para $n > N$:

$$|w_n| \leq \frac{|z_1 + \ldots z_N|}{n} + \frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{n - N}{n}\right) \leq \frac{|z_1 + \ldots + z_N|}{n} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

La expresión $|z_1 + \ldots + z_N|$ es número M independiente de n y, por lo tanto, para un cierto $N_0 > N$ se tiene $\frac{|z_1 + \ldots + z_N|}{n} = \frac{M}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$, si $n > N_0$. De esto se desprende que para $n > N_0$:

$$|w_n| < \varepsilon, \quad \text{o sea} \quad \lim_{n \to \infty} w_n = 0$$

Corolario. Si $z_n \to L$, entonces $w_n = \frac{z_1 + \ldots + z_N}{n} \to L$.

Demostración. La sucesión $\{z_n - L\}$ tiende a cero, y por el teorema 3 la sucesión $\frac{(z_1 - L) + \ldots + (z_n - L)}{n} = \frac{z_1 + \ldots + z_n}{n} - L$ converge a cero, o sea que $\frac{z_1 + \ldots z_n}{n}$ tiende a L.

Teorema 4. Supongamos que $\{x_n\}$ sea una sucesión de números reales positivos. Si $\{x_n\}$ tiende a un número L, resulta que la sucesión de las medias geométricas y_n:

$$y_n = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \ldots x_n}$$

también tiende a L.

Demostración. Como $\log y_n = \frac{1}{n}(\log x_1 + \ldots + \log x_n)$, y como en virtud de la hipótesis y de la continuidad de la función logarítmica, $\log x_n$ tiende a $\log L$, el corolario del teorema 3 aplicado a la sucesión $z_n = \log x_n$ nos da que $\lim \log y_n = \log L$. Finalmente, en virtud de la continuidad de la función e^x se tiene

$$y_n = e^{\log y_n} \to e^{\log L} = L$$

Ejemplo 1. Para todo número real r, $0 \leq r < 1$, se tiene $\lim_{n \to \infty} r^n = 0$. Dado $\varepsilon > 0$, hay que buscar un entero $N > 0$ tal que $r^n < \varepsilon$ para $n > N$. En efecto, tomando logaritmos y teniendo en cuenta que $\log r < 0$, se verifica que como N se puede tomar cualquier entero mayor o igual a $\frac{\log \varepsilon}{\log r}$.

De esto se desprende que si z es un número complejo tal que $0 < |z| < 1$, entonces $\lim_{n \to \infty} z^n = 0$. Para ver esto basta tomar un número real r tal que $|z| < r < 1$ y aplicar la desigualdad $|z^n| = |z|^n < r^n$.

Ejemplo 2. La suma de dos sucesiones puede ser convergente sin que ninguna de ellas lo sea. Tal es el caso de $z_n = n + \frac{1}{n}$ y $w_n = -n + \frac{1}{n}$, o también de $z_n = (-1)^n$, $w_n = (-1)^{n+1}$.

Ejemplo 3. Supongamos que p sea un número real positivo fijo. A continuación demostraremos que $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^p} = 1$. En efecto, como

$$\sqrt[n]{n^p} = \sqrt[n]{\frac{2^p}{1^p} \cdot \frac{3^p}{2^p} \cdots \frac{n^p}{(n-1)^p}}, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n^p}{(n-1)^p} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{n}}\right)^p = 1,$$

el teorema 4 aplicado a la sucesión $\{x_n\}$, $x_1 = 1$, $x_n = \dfrac{n^p}{(n-1)^p}$ para $n \geq 2$, nos da el resultado deseado.

Definición 2. Un número z_0 se llama *punto de acumulación* de una sucesión $\{z_n\}$ si cada vecindad $V_\epsilon(z_0)$ de z_0 contiene un número infinito de elementos de la sucesión, es decir, para cada $\epsilon > 0$ hay un número infinito de z_n tales que $|z_n - z_0| < \epsilon$.

El lector no deberá confundir el concepto de punto de acumulación de una sucesión con el de punto de acumulación de un conjunto. La sucesión $\{z_n\}$, definida por la relación $z_n = (-1)^n$, tiene dos puntos de acumulación: -1, 1; sin embargo, el conjunto $\{-1, 1\}$, que consiste de los dos elementos que aparecen en la sucesión, no tiene ningún punto de acumulación.

El lector observará, además, que todo límite de una sucesión es un punto de acumulación de dicha sucesión; sin embargo, el recíproco no es cierto, como lo es, por ejemplo, en el caso de la sucesión considerada anteriormente, $z_n = (-1)^n$, la cual posee dos puntos de acumulación y ningún punto límite. Esto nos muestra que el concepto de punto de acumulación de sucesiones es más general que el de límite.

Dada una sucesión $\{z_n\}$ y otra de números enteros positivos k_n $(n = 1, 2, \ldots)$ tales que $k_1 < k_2 < \ldots < k_n < \ldots$, entonces la sucesión $\{z_n'\} = \{z_{k_n}\}$ se llama una subsucesión de $\{z_n\}$. Por ejemplo, $\{z_n'\}$ con $z_n' = 1$, es una subsucesión de $\{(-1)^n\}$ (pues basta tomar $k_n = 2n$).

Teorema 5. Si z_0 es un punto de acumulación de una sucesión $\{z_n\}$, existe una subsucesión $\{z_n'\}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$.

Demostración. Como por cada $\epsilon > 0$ existe un número infinito de valores de n para los cuales $|z_n - z_0| < \epsilon$, entonces para $\epsilon = 1$ existe un $n = k_1$ tal que $|z_{k_1} - z_0| < 1$. Asimismo para $\epsilon = \frac{1}{2}$ existe un $n = k_2 > k_1$ tal que $|z_{k_2} - z_0| < \frac{1}{2}$. En general para $\epsilon = \frac{1}{n}$ existe un cierto $k_n > k_{n-1}$ tal que $|z_{k_n} - z_0| < \frac{1}{n}$. De esto se deduce que la subsucesión $z'_n = z_{k_n}$ converge a cero, ya que dado $\varepsilon > 0$ y tomando como N un número entero positivo tal que $\frac{1}{N} < \varepsilon$, se obtiene $|z_n - z_0| < \varepsilon$ para $n > N$.

Veamos ahora una condición suficiente para que una sucesión posea un punto de acumulación.

Teorema 6. Toda sucesión acotada de números complejos posee por lo menos un punto de acumulación.

Este teorema, cuya demostración omitimos, es una simple consecuencia del teorema de Bolzano-Weierstrass para sucesiones: toda sucesión acotada de números reales posee siempre un punto (real) de acumulación.

Observación. Una sucesión no acotada puede no tener ningún punto de acumulación, como sucede con la sucesión $\{n\}$.

Definición 3. $\{z_n\}$ se llama una *sucesión de Cauchy* si, para todo $\varepsilon > 0$, existe un número entero $N > 0$ tal que

$$|z_m - z_n| < \varepsilon \qquad \text{para todo } m > N,\ n > N.$$

Teorema 7 (Criterio de Cauchy sobre convergencia de sucesiones). Una sucesión $\{z_n\}$ es convergente si, y sólo si, $\{z_n\}$ es una sucesión de Cauchy.

Demostración. Supongamos en primer lugar que $\{z_n\}$ converja a z_0. Como $z_m - z_n = (z_m - z_0) + (z_0 - z_n)$, se tiene $|z_m - z_n| \le |z_m - z_0| + |z_n - z_0|$. Por lo tanto, si $|z_n - z_0| < \frac{\varepsilon}{2}$, $|z_m - z_0| < \frac{\varepsilon}{2}$ para $m > N$, $n > N$, se obtiene $|z_m - z_n| < \varepsilon$ para $m > N$, $n > N$, o sea que $\{z_n\}$ es una sucesión de Cauchy.

Viceversa, sea $\{z_n\}$ una sucesión de Cauchy y N un entero positivo, tal que $|z_m - z_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ para $m > N$, $n > N$. Como $|z_n| - |z_m| \le |z_n - z_m| = |z_m - z_n|$, se obtiene para $m = N + 1$: $|z_n| \le |z_m| + \frac{\varepsilon}{2}$ para todo $n > N$. De esto resulta que la sucesión $\{z_n\}$, para $n > N$, es una sucesión acotada. Esta sucesión posee, de acuerdo con el teorema 6, un punto de acumulación z_0, de modo que para un cierto $p > N$ $|z_p - z_0| < \frac{\varepsilon}{2}$. Por consiguiente

$$|z_n - z_0| \le |z_n - z_p| + |z_p - z_0| < \varepsilon \qquad \text{para todo } n > N,$$

o sea que $\{z_n\}$ converge a z_0.

Consideremos ahora *series* de números complejos. Dada una sucesión $\{z_n\}$, se puede considerar una nueva sucesión $\{S_n\}$, llamada sucesión de las sumas parciales de los z_n, definida en la forma siguiente:

$$S_1 = z_1$$

$$S_2 = z_1 + z_2$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$S_n = z_1 + z_2 + \ldots + z_n.$$

Si la sucesión $\{S_n\}$ converge a un número S, entonces se escribe

$$S = \sum_1^\infty z_n \qquad \text{ó} \qquad S = z_1 + z_2 \ldots + z_n + \ldots$$

y la serie $\sum_1^\infty z_n$ se dice convergente. S se llama la suma de la serie $\sum_1^\infty z_n$. Si la sucesión $\{S_n\}$ de las sumas parciales diverge, se dice que la serie $\sum_1^\infty z_n$ es divergente.

Si se tiene una sucesión $\{z_n\}$, $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, entonces se define

$$\sum_0^\infty z_n = z_0 + \sum_1^\infty z_n = z_0 + z_1 + \ldots + z_n + \ldots$$

$\sum_0^\infty z_n$ no es otra cosa que el límite de $\{S_n\}$, $S_n = z_0 + \ldots + z_n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$.

Ejemplo 4. Sea z un número complejo tal que $|z| < 1$. Entonces la serie $\sum_0^\infty z^n$ converge (en este caso $z_n = z^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$), y

$$\sum_0^\infty z^n = \frac{1}{1 - z} \quad .$$

En efecto, la relación

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \ldots + z^n + \frac{z^{n+1}}{1 - z}$$

se cumple y, por consiguiente, $S_n = \frac{1}{1-z} - \frac{z^{n+1}}{1-z}$. Como $\{z^{n+1}\}$ tiende a cero (ejemplo 1), la sucesión $\{S_n\}$, $S_n = 1 + z + \ldots + z^n$, converge a $\frac{1}{1-z}$ o sea que $\sum_{0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$.

Teorema 8. Sean $\sum_{1}^{\infty} z_n$ y $\sum_{1}^{\infty} w_n$ dos series convergentes. Entonces:

a) $\sum_{1}^{\infty} (z_n + w_n) = \sum_{1}^{\infty} z_n + \sum_{1}^{\infty} w_n$;

b) si a es una constante $\sum_{1}^{\infty} (az_n) = a \sum_{1}^{\infty} z_n$.

Demostración. Basta aplicar en ambos casos el teorema 1 a la sucesión de las sumas parciales. Por ejemplo, en el caso b), como se tiene $\sum_{i=1}^{n} (az_i) = a \sum_{i=1}^{n} z_i = aS_n$, el teorema 1 nos da $\sum_{1}^{\infty} (az_n) = \lim_{n\to\infty} (aS_n) = a(\lim_{n\to\infty} S_n) = aS = a \sum_{1}^{\infty} z_n$.

Teorema 9 (Criterio de Cauchy sobre convergencia de series). Condición necesaria y suficiente para que una serie $\sum_{1}^{\infty} z_n$ converja es que, para todo $\varepsilon > 0$, haya un entero $N > 0$ tal que:

$$|S_m - S_n| = |z_{n+1} + \ldots + z_m| < \varepsilon \qquad \text{para } m > n > N.$$

Demostración. El teorema dice precisamente que la sucesión de las sumas parciales $\{S_n\}$ converge si, y sólo si, $\{S_n\}$ es una sucesión de Cauchy, y esto no es otra cosa que el criterio de Cauchy relativo a sucesiones (teorema 7).

Teorema 10. Condición necesaria (aunque no suficiente) para que la serie $\sum_{1}^{\infty} z_n$ sea convergente es que $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$.

Demostración. Como $z_n = S_n - S_{n-1}$, se tiene en virtud de

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0$$

Ejemplo 5. La serie armónica: $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n}$, satisface la condición $\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, y sin embargo es divergente. En efecto, para cualquier entero positivo p se tiene

$$\frac{1}{2^p+1} + \ldots + \frac{1}{2^p+2^p} \geq \frac{1}{2^p+2^p} \cdot 2^p = 1/2$$

Por consiguiente, para $\varepsilon = 1/2$ no existe entero $N > 0$ alguno tal que la condición del criterio de Cauchy pueda ser satisfecha. Por lo tanto $\sum_1^\infty \frac{1}{n}$ diverge.

Definición 4. Una serie $\sum_1^\infty z_n$ se llama *absolutamente convergente* si $\sum_1^\infty |z_n|$ converge.

Teorema 11. Toda serie absolutamente convergente es convergente y, además, se tiene $|\sum_1^\infty z_n| \leq \sum_1^\infty |z_n|$.

Demostración. Como $\sum_1^\infty |z_n|$ converge, entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe un $N > 0$ tal que $|z_{n+1}| + \ldots + |z_m| < \varepsilon$ para todo $m > n > N$ (criterio de Cauchy). Por consiguiente, $|z_{n+1} + \ldots + z_m| \leq |z_{n+1}| + \ldots + |z_m| < \varepsilon$ para $m > n > N$, lo cual, en virtud del criterio de Cauchy, implica la convergencia de $\sum_1^n z_n$. Finalmente, como $|\sum_{i=1}^n z_i| \leq \sum_{i=1}^n |z_i|$, se tiene $\lim_{n\to\infty} |\sum_{i=1}^n z_i| \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n |z_i|$, o sea que $|\sum_1^\infty z_n| \leq \sum_1^\infty |z_n|$.

Teorema 12 (Comparación de series). Sean $\sum_1^\infty z_n$ y $\sum_1^\infty w_n$ dos series, con $\sum_1^\infty |w_n|$ convergente, y $|z_n| \leq |w_n|$, para $n \geq N_0$, en donde N_0 es un cierto número entero positivo. Entonces $\sum_1^\infty z_n$ converge absolutamente.

Demostración. Como $\sum_1^\infty |w_n|$ converge, entonces por cada $\varepsilon > 0$ existe un entero $N > N_0$ tal que

$|z_{n+1}| + \ldots + |z_m| \leq |w_{n+1}| + \ldots + |w_m| < \varepsilon$ siempre que $m > n > N$.

Pero esto, en virtud del criterio de Cauchy, implica la convergencia de $\sum_1^\infty |z_n|$.

Ejemplo 6. Sea un número real $0 \leq r < 1$, y $\sum_{1}^{\infty} z_n$ una serie tal que $|z_n| < r^n$ siempre que $n \geq N_0$, para un cierto N_0. Entonces la serie $\sum_{1}^{\infty} z_n$ converge absolutamente. En efecto, como la serie geométrica $\sum_{1}^{\infty} r^n$ es convergente (ejemplo 4), la convergencia absoluta de $\sum_{1}^{\infty} z_n$ es una consecuencia del teorema 12.

Definición 5. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales. El número real ρ se llama el límite superior de x_n, $\rho = \overline{\lim_{n \to \infty}}\, x_n$, si ρ satisface las dos condiciones siguientes:

a) Para cada $\varepsilon > 0$ existe un número entero $N_0 > 0$ tal que

$$x_n < \rho + \varepsilon \qquad \text{para } n \geq N_0;$$

b) Para cada $\varepsilon > 0$ existe un número infinito de elementos x_n de la sucesión tales que

$$x_n > \rho - \varepsilon .$$

Ejemplo 7. $\overline{\lim_{n \to \infty}}\, (-1)^n = 1$. Verifiquemos esto: la condición a) se cumple, ya que, para $\varepsilon > 0$, todos los $x_n = (-1)^n$ se encuentran situados a la izquierda de $1 + \varepsilon$, es decir, podemos tomar $N_0 = 1$. Por otra parte, la condición b) se satisface, pues para todo n par $x_n > 1 - \varepsilon$, cualquiera que sea $\varepsilon > 0$.

Una condición necesaria para que una sucesión $\{x_n\}$ posea un límite superior es que $\{x_n\}$ sea *acotada a la derecha*, es decir que exista un número $M > 0$ tal que $x_n \leq M$ para todo n ($n = 1, 2, \ldots$). En efecto, de la condición a) se deduce que si ρ es límite superior de $\{x_n\}$, entonces para $\varepsilon = 1$, $x_n < \rho + 1$ con tal que $n \geq N_0$. Por consiguiente, tomando $M = \text{Máx}\,\{x_1, \ldots, x_{N_0}, \rho + 1\}$ se obtiene $x_n \leq$ $\leq M$ para todo n. En vista de este resultado se suele decir que una sucesión no acotada a la derecha tiene como límite superior $\rho = \infty$.

Si una sucesión es convergente entonces su límite superior existe, es finito y coincide con el límite de la sucesión; sin embargo, una sucesión puede tener un límite superior finito sin que sea convergente, como sucede con la sucesión $\{(-1)^n\}$ (ejemplo 7).

Una de las aplicaciones más importantes del concepto de límite superior es el siguiente criterio de convergencia de series:

Teorema 13 (Criterio de raíces). Supongamos que $\{z_n\}$ sea una sucesión de números complejos con $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|z_n|} = \rho$. Entonces, para $\rho < 1$, la serie $\sum_1^\infty z_n$ converge absolutamente, mientras que para $\rho > 1$ la misma serie es divergente.

Demostración. Supongamos que $\rho < 1$, y tomemos como r un número tal que $\rho < r < 1$. Por consiguiente, tomando en la condición a) $\epsilon = r - \rho > 0$, se obtiene $\sqrt[n]{|z_n|} < r$ o $|z_n| < r^n$ para $n \geq N_0$, en donde N_0 es un cierto número entero positivo. Esto implica, en vista del ejemplo 6, la convergencia absoluta de $\sum_1^\infty z_n$.

Consideremos ahora el caso $\rho > 1$. Si ρ es finito, tomando entonces $\epsilon = \rho - 1 > 0$ en la condición b), resulta que existe un número infinito de z_n tales que $\sqrt[n]{|z_n|} > 1$, o lo que es lo mismo, $|z_n| > 1$. Por lo tanto, en virtud del teorema 10, la serie $\sum_1^\infty z_n$ es divergente. Finalmente, si $\rho = \infty$, lo cual significa que la sucesión $\{\sqrt[n]{|z_n|}\}$ no es acotada, entonces dado cualquier entero positivo k existe un z_{n_k} tal que $|z_{n_k}| > k^{n_k} \geq 1$, de lo cual resulta, aplicando nuevamente el teorema 10, que $\sum_1^\infty z_n$ es divergente.

Observación. Para $\rho = 1$ la serie $\sum_1^\infty z_n$ puede ser convergente o divergente, como lo muestran los siguientes ejemplos 8, 9.

Ejemplo 8. Para la serie armónica $\sum_1^\infty \frac{1}{n}$ el valor de ρ es 1. En efecto, de acuerdo con lo demostrado en el ejemplo 3,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}} = 1. \quad \text{Por lo tanto } \rho = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1 .$$

Por otra parte, ya se sabe (ejemplo 5) que la serie armónica es divergente.

Ejemplo 9. Para la serie $\sum_1^\infty \frac{1}{n^2}$ el valor de ρ es, nuevamente en virtud del ejemplo 3, igual a 1; sin embargo, en este caso la serie es convergente (véase ejercicio 3).

Ejemplo 10. La serie $\sum^{\infty} nr^{n-1}$, para $0 \le r < 1$, es convergente. En efecto, como $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ (ejemplo 3) y $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{r^{n-1}} = \lim_{n\to\infty} r^{1-(1/n)} = r$, se tiene en virtud del teorema 1, c),

$$\rho = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{nr^{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{nr^{n-1}} = r < 1,$$

de lo cual se deduce la convergencia de $\sum_{1}^{\infty} nr^{n-1}$.

El siguiente resultado nos da una caracterización importante del límite superior de $\{x_n\}$ en término de los puntos de acumulación de $\{x_n\}$.

Teorema 14. Un número real $\rho < \infty$ es límite superior de $\{x_n\}$ si, y sólo si, ρ satisface las dos condiciones siguientes:

i) ρ es un punto de acumulación de $\{x_n\}$;

ii) Si ρ_1 es un punto de acumulación de $\{x_n\}$, entonces $\rho_1 \le \rho$.

La demostración de este teorema la dejamos como ejercicio al lector (ejercicio 4). Conviene señalar que i) e ii) expresan precisamente el hecho que el límite superior es el extremo superior del conjunto formado por los puntos de acumulación de $\{x_n\}$.

Ejemplo 11. La sucesión $\{x_n\}$, $x_n = \text{sen}\,(\frac{n\pi}{2})$ tiene como puntos de acumulación los puntos: -1, 0, 1. Por consiguiente, de acuerdo con el teorema 14, $\overline{\lim_{n\to\infty}} \text{sen}\,(\frac{n\pi}{2}) = 1$.

Ejercicios

1) Una sucesión de números reales $\{x_n\}$ se dice creciente si $x_n \le x_{n+1}$, cualquiera que sea n. Demostrar que toda sucesión $\{x_n\}$ creciente y acotada a la derecha tiene como límite superior el extremo superior delconjunto formado por los elementos de la sucesión $\{x_n\}$.

2) Sea $\{x_n\}$ una sucesión en que $x_n \ge 0$, para todo n. Demostrar con ayuda del ejercicio 1, que si existe $M > 0$ tal que que $\sum_{i=1}^{n} x_i \le M$, para cualquier n, entonces la serie $\sum_{1}^{\infty} x_n$ es convergente. El lector podrá observar que como consecuencia de este resultado y

de la divergencia de la serie armónica, la sucesión $\{S_n\}$, $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$, no es acotada a la derecha.

3) Probar, basándose en el ejercicio 2 y en la desigualdad $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2$, la convergencia de $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

4) Dar una demostración del teorema 14.

5) Utilizar el teorema 4 para demostrar $\lim_{n \to \infty} (\frac{1}{n!})^{1/n} = 0$.

2

FUNCIONES HOLOMORFAS

§ 1. Funciones de Una Variable Compleja

Definición 1. Se llama *función de la variable compleja z* a toda regla o aplicación que a todo elemento z de un conjunto $D \subset \mathbb{C}$ hace corresponder otro elemento $w \in \mathbb{C}$ y que se denota por $f(z)$. D, el conjunto en donde está definida f, recibe el nombre de *dominio de definición* de f, $w = f(z)$ *el valor de f en el punto z o la imagen de z bajo f*. Si $S \subset D$, entonces $f(S) = \{w | w = f(z),\ z \in S\}$, el conjunto de las imágenes de los elementos $z \in S$, se llama la *imagen de S bajo f*. Cuando $S = D$, $f(D)$ se llama sencillamente el *conjunto imagen de f*.

Observación. La noción de dominio de definición de una función no tiene nada que ver con la noción de dominio adoptada en el § 2 del cap. 1. El dominio de definición de una función puede no ser un dominio. Además, el lector no deberá confundir la función f con $f(z)$, que es el valor de f en el punto z.

Ejemplo 1. Una sucesión $\{z_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ no es otra cosa que una función f cuyo dominio de definición es $S = \{1, 2, 3, \ldots\}$ y en donde $f(n) = z_n$. En este caso S no es un dominio.

Ejemplo 2. $f(z) = |z|$ es una función de dominio de definición $\mathbb{C}$. $f(\mathbb{C})$, el conjunto imagen, es el conjunto de los números reales mayores o iguales a cero.

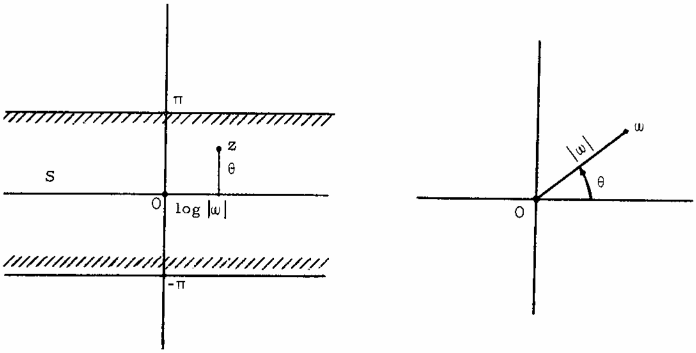
Ejemplo 3. La función transcendente $f(z) = e^z$ (véase la def. 6 del cap. 1, § 1) tiene $\mathbb{C}$ por dominio de definición. Mostremos que $f(\mathbb{C})$ es el conjunto $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$, es decir $\mathbb{C}^*$ es el plano complejo desprovisto del origen. Esto equivale a demostrar que por todo $w \neq 0$, la ecuación $e^z = w$ tiene por lo menos una solución. A continuación demostraremos que dicha ecuación no sólo tiene una, sino un número infinito de soluciones.

En efecto, si θ, $-\pi < \theta \leq \pi$, es el argumento principal Arg w de w, entonces w se puede representar en la forma $w = |w| e^{i\theta}$ (fórmula 1.30 del cap. 1, § 1). El número $z_0 = \log |w| + i\theta$, en donde $\log |w|$ es el logaritmo del número real $|w| > 0$, es una solución de $e^z = w$, ya que $e^{z_0} = e^{\log|w|} e^{i\theta} = |w| \cdot e^{i\theta} = w$. Por otra parte, si z es una solución cualquiera de $e^z = w$, se tiene $e^{z - z_0} = 1$, y en virtud de [1.35] cap. 1, § 1,

$$z - z_0 = 2n\pi i, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Es decir, la ecuación $e^z = w$ ($w \in \mathbb{C}^*$) tiene como soluciones:

$$z = z_0 + 2n\pi i = \log|w| + i\theta + 2n\pi i \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \quad [1.1]$$



Plano de la variable z — Plano de la variable — Fig. 3

Obsérvese que $z_0 = \log |w| + i\theta$ es un punto de la *faja* $S = \{z | z = x + iy,\ -\pi < y \le \pi\}$, y es la *única* solución de $e^z = w$ ($w \neq 0$) en dicha faja.

Basados en el resultado del ejemplo 3 damos a continuación la siguiente definición.

Definición 2. Sea $w \neq 0$ un número complejo. Todo número z solución de la ecuación $e^z = w$ se llama un *logaritmo* de w. La solución especial:

$$z_0 = \log |w| + i\theta \qquad (\theta = \operatorname{Arg} w,\ -\pi < \theta \le \pi)$$

se llama el *valor principal del logaritmo* de w y se denotará por $\operatorname{Log} w$.

De acuerdo con la relación [1.1], cada $w \in \mathbb{C}^*$ tiene un número infinito de logaritmos z, dados por la fórmula

$$z = \operatorname{Log} w + 2n\pi i \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots \quad [1.2]$$

El logaritmo principal $\operatorname{Log} w = \log w + i\theta$ ($\theta = \operatorname{Arg} w$) (caso $n = 0$) es el único logaritmo de w que se encuentra en la faja S. Nótese que para el caso de un número *real* $w > 0$ $\operatorname{Log} w = \log w$.

Ejemplo 4. Para i se tiene $\operatorname{Arg} i = \frac{\pi}{2}$, $|i| = 1$. Por consiguiente $\operatorname{Log} i = \log 1 + i\frac{\pi}{2} = i\frac{\pi}{2}$ y todo número $z = i\frac{\pi}{2} + 2n\pi i$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ es un logaritmo de i.

Consideremos la función $f(z) = e^z$ restringida a la faja S, y la función $g(w) = \operatorname{Log} w$, definida en $\mathbb{C}^*$. Entre estas funciones existen las relaciones siguientes:

$$f(g(w)) = w \quad \text{para todo} \quad w \in \mathbb{C}^* \qquad [1.3]$$

$$g(f(z)) = z \quad \text{para todo} \quad z \in S. \qquad [1.4]$$

En efecto, todo $w \in \mathbb{C}^*$ se puede escribir en la forma (polar) $w = |w|e^{i\theta}$, con $|w| > 0$, $\theta = \operatorname{Arg} w$. Entonces $f(g(w)) = f(\operatorname{Log} w) = e^{\operatorname{Log} w} = e^{\log|w| + i\theta} = |w|e^{i\theta} = w$, lo cual prueba [1.3]. Sea ahora $z = x + iy \in S$. Como $|e^z| = e^x$, $\operatorname{Arg} e^z = y$, en virtud de [1,34] cap. 1, § 1, se tiene $g(f(z)) = g(e^z) = \operatorname{Log} e^z = \log e^x + iy = x + iy = z$, o sea [1.4]. En vista de [1.3] y [1.4], la función $\operatorname{Log} w$ se llama la inversa de la función e^z.

A continuación definiremos lo que se entiende por potencia compleja de un número complejo.

Definición 3. Si $z \neq 0$ y λ es un número complejo cualquiera, entonces, por definición:

$$z^\lambda = e^{\lambda \operatorname{Log} z}$$

Ejemplo 5. $(-1)^i = e^{i\operatorname{Log}(-1)} = e^{i(\pi i)} = e^{-\pi}$.

§ 2. Funciones Continuas

Definición 1. Sea f una función definida en un conjunto D del plano complejo, excepto tal vez en el punto z_0 de D. Se dice que el número L es el límite de $f(z)$ cuando z tiende a z_0 o

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = L,$$

si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $|f(z) - L| < \varepsilon$ para todo z en D que satisfaga $0 < |z - z_0| < \delta$.

Obsérvese que para que exista el límite L no es necesario que f esté definida en el punto z_0.

Ejemplo 1. Sea $f(z) = \dfrac{z^2 + 9}{z - 3i}$. f está definida solamente para $z \neq 3i$. Sin embargo $\lim\limits_{z \to 3i} f(z) = 6i$. En efecto, si $z \neq 3i$, entonces se tiene

$$|f(z) - 6i| = |z - 3i|.$$

Por consiguiente, tomando $\delta = \epsilon$ se obtiene $|f(z) - 6i| < \epsilon$ si $0 < |z - 3i| < \delta$, o sea que $\lim\limits_{z \to 3i} \dfrac{z^2 + 9}{z - 3i} = 6i$.

Definición 2. Se dice que una función f definida en un conjunto D es *continua en el punto* $z_0 \in$ D si

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0).$$

En otras palabras, f es continua en el punto z_0 si, y sólo si, se cumplen las condiciones siguientes:

(a) f está definida en el punto z_0.

(b) existe el $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$.

(c) $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$.

Si f es continua en cada punto z de D se dice que f es continua en D.

La función del ejemplo 1 es continua en $D = \mathbb{C} - \{3i\}$ y no lo es en el punto $z_0 = 3i$ por cuanto no se satisface la condición (a).

Las operaciones de adición, substracción, multiplicación y división de funciones definidas en un mismo conjunto se *definen* por medio de las relaciones siguientes:

$$(f + g)(z) = f(z) + g(z)$$
$$(f - g)(z) = f(z) - g(z)$$
$$(f \cdot g)(z) = f(z) \cdot g(z)$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)(z) = \frac{f(z)}{g(z)} \quad (\text{si } g(z) \neq 0).$$

Además, se verifica fácilmente

$$\lim_{z \to z_0} (f + g)(z) = \lim_{z \to z_0} f(z) + \lim_{z \to z_0} g(z) \qquad [2.1]$$

$$\lim_{z \to z_0} (f - g)(z) = \lim_{z \to z_0} f(z) - \lim_{z \to z_0} g(z) \qquad [2.2]$$

$$\lim_{z \to z_0} (f \cdot g)(z) = (\lim_{z \to z_0} f(z))(\lim_{z \to z_0} g(z)) \qquad [2.3]$$

$$\lim_{z \to z_0} \left(\frac{f}{g}\right)(z) = \frac{\lim_{z \to z_0} f(z)}{\lim_{z \to z_0} g(z)} \quad (\text{si } \lim_{z \to z_0} g(z) \neq 0). \qquad [2.4]$$

Si f y g son dos funciones tales que el conjunto imagen de g, $I(g)$, esté contenido en el dominio de definición $D(f)$ de f, entonces la *función compuesta* $h = f \circ g$* es por definición la función:

$$h(z) = f(g(z)), \qquad z \in D(g).$$

Los teoremas siguientes, cuya respectiva demostración puede verse en cualquier buen texto de Cálculo, expresan que la continuidad es una propiedad que subsiste cuando se opera algebraicamente con funciones continuas o se considera la composición de las mismas. El teorema 1 es consecuencia inmediata de las relaciones [2.1]-[2.4].

Teorema 1. Supongamos que las funciones f y g sean continuas en un conjunto D. Entonces $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ son también continuas en D, y $\frac{f}{g}$ lo es en aquellos puntos $z \in D$ en los cuales $g(z) \neq 0$.

Teorema 2. Si g es continua en z_0 y f en $g(z_0)$, entonces la función compuesta $h = f \circ g$ es también continua en el punto z_0, es decir:

$$\lim_{z \to z_0} f(g(z)) = f(g(z_0)).$$

Por consiguiente, si g es continua en el conjunto D, y f lo es en $g(D)$, resulta que $h = f \circ g$ es continua en D.

Observación. Como evidentemente las funciones $f(z) = c$ (c = constante) y $f(z) = z$ son ambas continuas en $\mathbb{C}$, del teorema 1 se deduce que todo polinomio $P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$ es continuo en $\mathbb{C}$. Asimismo, toda función racional

$$\frac{P(z)}{Q(z)}$$

*La función compuesta h también se escribe $f[g]$.

es continua en todo punto z en que $Q(z) \neq 0$. En particular la función $f(z) = \frac{z^2 + 9}{z - 3i}$ del ejemplo 1 es continua en todo punto $z \neq 3i$.

Ejemplo 2. En virtud de las relaciones [1.3] y [1.4] la composición de la función $f(z) = e^z$, definida en la faja S, con la función $g(z) = \text{Log } z$, definida en $\mathbb{C}^*$, nos da que $f \circ g$ es la *función idéntica* en $\mathbb{C}^*$: $h(z) = z$, para todo $z \in \mathbb{C}^*$, mientras que $g \circ f$ es la *función idéntica en* S: $h(z) = z$ para todo $z \in S$. Nótese que los respectivos dominios de definición de ambas funciones son diferentes y por lo tanto $f \circ g$ y $g \circ f$ se consideran como dos funciones distintas.

Toda función f de la variable $z = x + iy$ se puede escribir en la forma

$$f = u + iv,$$

en donde u y v son funciones de las variables reales (x, y) que toman, además, sólo valores reales. Si se define:

$$u(x, y) = \text{Re}[f(x + iy)]$$
$$v(x, y) = \text{Im}[f(x + iy)]$$

es claro que en cada punto $z = x + iy$ se tiene $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$.

Definición 3. En la representación $f = u + iv$ de la función f de la variable compleja z, u se llama la *parte real* y v la *parte imaginaria* de f.

Ejemplo 3. Para $f(z) = z^2 - 1$ se tiene $z^2 - 1 = (x + iy)^2 - 1 = (x^2 + y^2 - 1) + i(2xy)$, o sea: $u(x, y) = x^2 + y^2 - 1$, $v(x, y) = 2xy$.

Ejemplo 4. Para el caso de la función $\text{Log } z = \log |z| + i\theta$ ($|z| > 0$ y $\theta = \text{Arg } z$), definida en § 1, se tiene:

$$u(x, y) = \log \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad v(x, y) = \theta = \text{arc tg} \frac{y}{x} \qquad (-\pi < \theta \leq \pi).$$

Observación. Dada una función $f = u + iv$ es fácil de verificar que f es continua en el punto $z_0 = x_0 + iy_0$ si, y sólo si, u y v son ambas continuas en el punto (x_0, y_0), es decir, si para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$|u(x, y) - u(x_0, y_0)| < \epsilon, \qquad |v(x, y) - v(x_0, y_0)| < \epsilon$$

cada vez que $0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$ (véase ejercicio 1).

Ejemplo 5. Apliquemos ahora el criterio anterior a la función Log z, definida para $z \neq 0$. La función $u(x, y) = \log\sqrt{x^2 + y^2}$ es continua en cada punto $(x, y) \neq (0, 0)$. En cuanto a la función $v(x, y) = \theta$, ella es continua en todo punto $(x, y) = (0, 0)$ que no esté sobre el semieje negativo del eje real (véase Fig. 4). En efecto, si $x_0 < 0$ es un punto de dicho semieje, entonces para $y > 0$ se tiene

$$\lim_{y \to 0} \operatorname{Arg}(x_0 + iy) = \pi, \qquad \lim_{y \to 0} \operatorname{Arg}(x_0 - iy) = -\pi.$$

Por consiguiente, la función $\theta = \operatorname{Arg} z$ es discontinua en cada punto $x_0 < 0$. De esto se deduce que la función Log z es continua en el plano complejo si se exceptúa el semieje real negativo.

Las funciones continuas gozan de propiedades especiales cuando se las considera en conjuntos compactos o conexos.

Teorema 3. Si f es continua en un conjunto compacto K entonces $f(K)$ es también compacto.

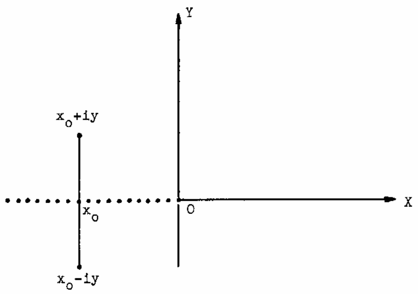


Fig. 4

En vez de dar una demostración de este teorema[3], [1] vamos a derivar de él el siguiente resultado:

Colorario (Teorema de Bolzano). Sea f una función que toma valores reales y es continua en un compacto K. Entonces existen puntos z_0, z_1 en K tales que

$$f(z_0) \leq f(z) \leq f(z_1) \quad \text{para todo} \quad z \in K.$$

z_0 es el punto de K en donde f alcanza su mínimo y z_1 el punto, igualmente en K, en donde f alcanza su máximo (en K).

Demostración del Colorario. En virtud del teorema 3 y de la hipótesis de que f toma valores reales se tiene que $f(K)$ es un conjunto cerrado y acotado de números reales. Por ser $f(K)$ acotado existen el extremo superior M y el extremo inferior m de $f(K)$, y por ser $f(K)$ cerrado, M y m son puntos de $f(K)$. Por consiguiente existen en K puntos z_0, z_1 tales que $f(z_0) = m$, $f(z_1) = M$. De esto se desprende que se cumple: $f(z_0) \leq f(z) \leq f(z_1)$ para todo $z \in K$, que era lo que se quería demostrar.

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|z_n|} = (\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|})\ |z - z_0| = \frac{|z - z_0|}{R},$$

del teorema 13, cap. 1, § 3, se sigue que la serie $\sum_0^\infty a_n(z - z_0)^n = = \sum_0^\infty z_n$ converge absolutamente si $\frac{|z - z_0|}{R} < 1$, o sea si $|z - z_0| < R$, y diverge cuando $\frac{|z - z_0|}{R} > 1$, es decir cuando $|z - z_0| > R$.

Cuando $R = \infty$ se tiene $\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|z_n|} = 0$ para cualquier $z \in \mathbb{C}$, y en el caso $R = 0$, $\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|z_n|} = \infty$ cada vez que $z \neq z_0$. Por consiguiente, en virtud del teorema que se acaba de citar, la serie [4. 1] es absolutamente convergente en todo punto z del plano complejo cuando $R = \infty$, y es divergente en todo punto $z \neq z_0$ si $R = 0$. Naturalmente, cualquiera que sea el valor de R, la serie [4. 1] converge siempre en el punto $z = z_0$, y su suma es en ese caso igual al coeficiente a_0.

Definición 1. El número R definido por medio de [4. 2] recibe el nombre de *radio de convergencia* de la serie [4. 1]. Cuando $0 < R < \infty$, $D_R = \{z \mid |z - z_0| < R\}$ se llama el *círculo* o *disco de convergencia* de la misma serie.

Observación. Para los puntos z situados sobre la circunferencia $|z - z_0| = R$ $(0 < R < \infty)$, la serie [4. 1] puede converger o diverger.

Ejemplo 1. La serie $\sum_0^\infty z^n$ tiene como radio de convergencia $R = 1$, y como círculo de convergencia $\{z \mid |z| < 1\}$. En este caso, para todo punto z con $|z| = 1$, la serie diverge, ya que $|z^n| = |z|^n = 1$ y por consiguiente, en virtud del teorema 10, cap. 1, § 3, la serie es divergente. El lector recordará (ejemplo 4, cap. 1, § 3) que $\sum_0^\infty z^n = \frac{1}{1 - z}$ para $|z| < 1$.

Ejemplo 2. La serie $\sum_0^\infty \frac{z^n}{n^2}$ tiene por radio de convergencia $R = 1$ y para todo z de $|z| = 1$ la serie es absolutamente convergente (véase ejemplo 9, cap. 1, § 3).

Ejemplo 3. La serie $\sum_0^\infty n^n z^n$ posee como radio de convergencia

$R = 0$, ya que $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^n} = \overline{\lim_{n\to\infty}}\ n = \infty$.

Ejemplo 4. La serie $\sum_0^\infty \frac{z^n}{n^n}$ tiene por radio de convergencia

$R = \infty$ y, por lo tanto, es absolutamente convergente para todo z del plano complejo.

Lema. Las series de potencias $\sum\limits_{0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ y $\sum\limits_{0}^{\infty} na_n(z - z_0)^{n-1}$ tienen igual radio de convergencia.

Demostración. Denotemos por R y R' los respectivos radios de convergencia de $\sum\limits_{0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ y $\sum\limits_{1}^{\infty} na_n(z - z_0)^{n-1}$.

En primer lugar, demostremos que se cumple $R' \leq R$. Si r es tal que $r < R'$, entonces, en virtud del teorema 1, la serie $\sum\limits_{0}^{\infty} n|a_n|r^{n-1}$ es convergente, y en vista de

$$\sum_{1}^{\infty}|a_n|r^n \leq r \sum_{1}^{\infty} n|a_n|r^{n-1} < \infty,$$

la serie $\sum\limits_{1}^{\infty} a_n r^n$ lo es también, de lo cual se sigue que $r \leq R$, en virtud del teorema 1. Como para todo $r < R'$ se cumple $r \leq R$, se obtiene que $R' \leq R$ (pues si se tuviera $R' > R$, tomando r tal que $R < r < R'$ se llegaría a una contradicción).

Mostremos ahora que para todo r tal que $r < R$ se cumple $r \leq R'$, de lo cual se sigue naturalmente que $R \leq R'$ o sea, en total, $R = R'$. Es claro que basta considerar el caso $0 < R \leq \infty$. Sea $r < R$ y escojamos como r' un número tal que $r < r' < R$. Como

$$n|a_n|r^{n-1} = \frac{1}{r'}(|a_n|r'^n)n\rho^{n-1} \qquad \left(\rho = \frac{r}{r'} < 1, \quad n = 1, 2, \ldots\right)$$

y como, por otra parte, de la convergencia de la serie $\sum\limits_{0}^{\infty} a_n r'^n$ (debido a $r' < R$) se sigue que la sucesión $\{|a_n|r'^n\}$ tiende a cero (teorema 10, cap. 1 § 3) y por lo tanto existe $M > 0$ tal que $|a_n|r'^n \leq M$ para todo n (teorema 2, cap. 1 §3) se obtiene

$$n|a_n|r^{n-1} \leq \frac{M}{r'} n\rho^{n-1} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

En el ejemplo 10 del cap. 1 § 3 hemos visto que la serie $\sum\limits_{1}^{\infty} n\rho^{n-1}$, si $\rho < 1$, es convergente. En virtud del teorema 12, cap. 1, § 3, la serie $\sum\limits_{1}^{\infty} n|a_n|r^{n-1}$ es convergente también. De esto se deduce que $r \leq R'$, lo cual concluye la demostración del lema.

Supongamos que $\sum\limits_{0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ sea una serie de potencias cuyo radio de convergencia es positivo R. Esta serie define, en el círculo de convergencia D_R, una función f, $f(z) = \sum_0^\infty a_n(z - z_0)^n$. Una tal función f se dice que está representada en D_R por una serie de potencias (convergente). Que esta función es holomorfa en D_R constituye uno de los resultados más importantes de la teoría de las funciones de variable compleja, y el cual demostramos a continuación.

Teorema 2. Toda serie de potencias $\sum_0^\infty a_n(z - z_0)^n$ de radio de convergencia $0 < R \leq \infty$ representa, en su círculo de convergencia D_R, una función holomorfa f, cuya derivada f' está representada, a su vez, por una serie de potencias:

$$f'(z) = \sum_1^\infty n a_n (z - z_0)^{n-1} \qquad (z \in D_R) \tag{4.3}$$

Demostración. En virtud del lema la función

$$f_1(z) = \sum_1^\infty n a_n (z - z_0)^{n-1}$$

está definida en D_R. Basta demostrar que, para cada punto $z \in D_R$, se tiene

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = f_1(z). \tag{4.4}$$

A fin de que la función f esté definida en el punto $z + h (h \neq 0)$ hay que considerar valores de h tales que $z + h \in D_R$, lo cual se verifica, por ejemplo, cuando $|h| \leq r - |z - z_0|$, en donde $0 \leq r < R$. Como

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} - f_1(z) = \sum_2^\infty \frac{a_n}{h} \left[(z + h - z_0)^n - (z - z_0)^n - nh(z - z_0)^{n-1}\right]$$

la relación

$$\frac{b^n - c^n}{b - c} = b^{n-1} + b^{n-2}c + \ldots + c^{n-1} \qquad (n \geq 2)$$

aplicada a $c = z - z_0$, $b = z + h - z_0$ nos da

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} - f_1(z) = \sum_2^\infty u_n(z, h),$$

en donde $u_n(z, h) = a_n \left[(z + h - z_0)^{n-1} + (z - z_0)(z + h - z_0)^{n-2} + \ldots + (z - z_0)^{n-1} - n(z - z_0)^{n-1}\right]$, expresión que es un polinomio de grado

$n - 1$ en h(z es fijo). Obsérvese que para $h = 0$ el valor de este polinomio es cero.

Como $|z - z_0| \leq r$, $|z + h - z_0| \leq |h| + |z - z_0| \leq r$, se sigue que $|u_n(z, h)| \leq 2|a_n| n r^{n-1}$.

Del hecho de ser R el radio de convergencia de $\sum_1^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}$, se deduce que existe un entero positivo N_0 tal que

$$\left| \sum_{n > N_0} u_n(z, h) \right| \leq 2 \sum_{n > N_0} n |a_n| r^{n-1} < \varepsilon/2.$$

Por otra parte, la expresión $\sum_{2 \leq n \leq N_0} u_n(z, h)$ es un polinomio en h que se anula para $h = 0$, ya que, para cada $n \geq 2$, se tiene $u_n(z, 0) = 0$. De esto se deduce que existe un $\delta > 0$ tal que

$$\left| \sum_{2 \leq n \leq N_0} u_n(z, h) \right| < \varepsilon/2 \qquad \text{para} \qquad |h| < \delta.$$

Tomando ahora valores de h tales que $|h| \leq r - |z - z_0|$, $|h| < \delta$, se obtiene finalmente

$$\left| \frac{f(z + h) - f(z)}{h} - f_1(z) \right| \leq \left| \sum_{2 \leq n \leq N_0} u_n(z, h) \right| + \left| \sum_{n > N_0} u_n(z, h) \right| < \varepsilon,$$

lo cual demuestra [4. 4] y por lo tanto el teorema.

Corolario 1. La función $f(z) = \sum_0^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ es continua en D_R.

Demostración. La continuidad de f es una consecuencia del teorema 3, § 3, y del teorema 2.

Si se aplica la demostración del lema a las series $\sum_1^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}$, $\sum_2^{\infty} n(n - 1) a_n (z - z_0)^{n-2}$, se encuentra que ellas tienen el mismo radio de convergencia. En general, procediendo por inducción se demuestra que si $\sum_0^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ tiene como radio de convergencia R, entonces para todo entero positivo k la serie

$$\sum_{n=k}^{\infty} n(n - 1) \dots (n - k + 1) a_n (z - z_0)^{n-k}$$

tiene también R como radio de convergencia. Esto nos permite definir para cada k una función f_k en D_R

$$f_k(z) = \sum_k^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)a_n(z-z_0)^{n-k} \qquad [4.5]$$

Aplicando a estas funciones los mismos razonamientos de la demostración del teorema 2, se obtiene:

Teorema 3. Toda serie de potencias $\sum_0^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ con radio de convergencia $0 < R \leq \infty$ define en su círculo de convergencia D_R una función f que es indefinidamente diferenciable. En un punto $z \in D_R$ el valor de su k-ésima derivada está dado por

$$f^{(k)}(z) = \sum_k^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)a_n(z-z_0)^{n-k}. \qquad (n = 1, 2, 3, \dots) [4.6]$$

para $z = z_0$ se tiene

$$f^{(k)}(z_0) = k!\,a_k \qquad (k = 0, 1, 2, \dots), \qquad [4.7]$$

en donde $f^{(0)}(z_0)$ es, por definición, igual a $f(z_0)$.

Observación. Este resultado fundamental muestra que los coeficientes a_n de una serie de potencias $\sum_0^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ quedan completamente determinados por los valores de la suma $f(z) = \sum_0^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ para z en una vecindad $V_\epsilon(z_0)$ del punto z_0, ya que para calcular el valor de cualquier derivada de f en el punto z_0 sólo se necesita conocer el valor de f en una vecindad de dicho punto. De esta observación resulta el siguiente teorema.

Teorema 4 (Identidad de series de potencias). Sean $\sum_0^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ y $\sum_0^{\infty} b_n(z-z_0)^n$ dos series de potencias tales que ambas sean convergentes y tengan la misma suma para todo z en una vecindad $V_\epsilon(z_0)$ de z_0. Entonces los coeficientes de ambas series coinciden, es decir, $a_n = b_n (n = 0, 1, 2, \dots)$.

Ejemplo 5. La serie de potencias $\sum_0^{\infty} (-1)^n(z-1)^n$ tiene como radio de convergencia $R = 1$, y como círculo de convergencia $D_R = \{z \mid |z-1| < 1\}$. En virtud del teorema 3, la función

$$f(z) = \sum_0^{\infty} (-1)^n(z-1)^n \qquad (|z-1| < 1)$$

es en D_R indefinidamente diferenciable y

$$f^{(k)}(1) = k!(-1)^k.$$

Se observará que en este caso f es la función $f(z) = \frac{1}{z}$, ya que para $|z - 1| < 1$ se tiene:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{1-(1-z)} = \sum_0^\infty (1-z)^n = \sum_0^\infty (-1)^n (z-1)^n.$$

Ejemplo 6. Dada una sucesión acotada de números complejos $\{a_n\}$ $(n = 0, 1, \ldots)$ es natural preguntar si existe una función φ indefinidamente diferenciable en todo el plano complejo y tal que sus derivadas en el origen, $\varphi^{(n)}(0)$, satisfagan:

$$\varphi^{(n)}(0) = a_n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

La respuesta es afirmativa. En efecto, la serie $\sum_0^\infty \frac{z^n}{n!}$ es absolutamente convergente en todo el plano complejo, ya que, en virtud de $\lim_{n\to\infty} (\frac{1}{n!})^{1/n} = 0$ (ejercicio 5, cap. 1 § 3), su radio de convergencia es $R = \infty$. Por consiguiente, como $\frac{|a_n|}{n!} \leq \frac{M}{n!}$ para un cierto $M > 0$ (por ser $\{a_n\}$ acotada), la serie $\sum_0^\infty \frac{a_n}{n!} z^n$ es absolutamente convergente para todo $z \in \mathbb{C}$, es decir, su radio de convergencia es también ∞. De esto se sigue, en virtud del teorema 3, que la función $\varphi(z) = \sum_0^\infty \frac{a_n}{n!} z^n$ es indefinidamente diferenciable en todo el plano complejo y, además, $\varphi^{(n)}(0) = a_n$.

En el caso especial en que $a_n = 1$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ la función φ no es otra que la función

$$e^z = \sum_0^\infty \frac{z^n}{n!},$$

como se verá más adelante (véase ejercicio 2, cap. 4, § 2).

§ 5. Las Ecuaciones de Cauchy-Riemann

El teorema siguiente, lo mismo que el teorema 2, nos mostrará que la parte real u y la parte imaginaria v de una función holomorfa f están ligadas por ciertas relaciones, las cuales nos dan un criterio útil y sencillo para determinar cuándo una función f es holomorfa.

Teorema 1. *Condición necesaria* para que una función $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ sea holomorfa en un dominio D es que existan las derivadas parciales $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ y éstas satisfagan las ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{5.1}$$

en cada punto $z = x + iy$ de D.

Condición suficiente para que $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ sea holomorfa en un dominio D es que existan las derivadas parciales $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$, que éstas ***sean continuas*** y satisfagan las ecuaciones de Cauchy-Riemann en cada punto $z = x + iy$ de D.

Demostración. Solamente probaremos la necesidad de las ecuaciones [5.1]. En efecto, sea $f = u + iv$ holomorfa en D. Como para todo punto $z_0 = x_0 + iy_0$ de D existe

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = f'(z_0)$$

se tiene en particular para h ***real*** y en vista de

47

$$\frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \frac{u(x_0 + h, y_0) - u(x_0, y_0)}{h} + i \frac{v(x_0 + h, y_0) - v(x_0, y_0)}{h}$$

que $f'(z_0) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{u(x_0 + h, y_0) - u(x_0, y_0)}{h} + i \lim\limits_{h \to 0} \frac{v(x_0 + h, y_0) - v(x_0, y_0)}{h}$

es decir,

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \tag{5.2}$$

Las derivadas parciales $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ existen en virtud del ejercicio 1, § 2. Por otra parte, si h es de la forma $h = it$, t real, se tiene:

$$\frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \frac{u(x_0, ty_0) - u(x_0, y_0)}{it} + i \frac{v(x_0, y_0 + t) - v(x_0, y_0)}{it}$$

y por consiguiente pasando al límite cuando h tiende a cero, se obtiene:

$$f'(z_0) = -i \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \qquad [5, 3]$$

De [5.2] y [5.3] resulta que, para cada punto $z_0 = x_0 + iy_0 \in D$, se cumplen las ecuaciones [5.1].

Observación. De la demostración del teorema anterior se desprende que si $f = u + iv$ es holomorfa en un dominio D, entonces en cada punto $z = x + iy \in D$ se tiene

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)(z) = \left(\frac{\partial}{\partial x}(u + iv) + i\frac{\partial}{\partial y}(u + iv)\right)(x, y) = 0 \qquad [5.4]$$

En el capítulo 4 (corolario 1, teorema 1, § 2) se demostrará que toda función holomorfa en un dominio es indefinidamente diferenciable en el mismo dominio. De esto se desprende que si $f = u + iv$ es holomorfa en un dominio D, entonces f' es también holomorfa en D. Por consiguiente, aplicando el teorema 1 a la función $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + i\frac{\partial v}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x, y)$, se obtiene que las derivadas parciales $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ existen y son continuas, siendo la continuidad de estas derivadas parciales una consecuencia de la continuidad de $f'(z)$. Es más, del hecho de ser f indefinidamente diferenciable en D, se deduce que las funciones u, v son indefinidamente diferenciables (en el sentido real) con respecto a las variables x, y. Resumiendo:

48

Teorema 2. *Condición necesaria y suficiente* para que una función $f = u + iv$ sea holomorfa en un dominio D es que, en cada punto $z = x + iy$, las derivadas parciales $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ existan, sean continuas y satisfagan las ecuaciones de Cauchy-Riemann [5.1].

Si se diferencia con respecto a x en la primera de las ecuaciones de Cauchy-Riemann, y con respecto a y en la segunda de ellas, se obtiene sumando:

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)(x, y) = 0, \qquad \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)(x, y) = 0. \qquad [5.5]$$

Una función real $w(x, y)$, con derivadas de segundo orden continuas con respecto a x, y se llama *armónica* en un dominio D, si en cada punto $z = x + iy \in D$ se satisface la ecuación de Laplace:

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)(x, y) = 0.$$

De [5.5] resulta:

Teorema 3. Si $f = u + iv$ es holomorfa en un dominio D, entonces u, v son funciones armónicas en D.

Hacemos observar que el recíproco de este teorema no es cierto, es decir, u, v pueden ser armónicas en un dominio D sin que f sea holomorfa en D.

Ejemplo 1. La función $f(z) = e^z = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$ es holomorfa en todo el plano complejo y $f'(z) = e^z$. En efecto, $u(x) = e^x \cos y$, $v(x) = e^x \operatorname{sen} y$ satisfacen en todo punto $z = x + ix \in \mathbb{C}$ las ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$u_x = e^x \cos y = v_y$$

$$u_y = -e^x \operatorname{sen} y = -v_x.$$

Por otra parte, teniendo en cuenta [5.2], se tiene $f'(z) = u_x(x, y) + iv_x(x, y) = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y) = e^z$.

Ejemplo 2. Toda función f tal que $f = u + iv$ y su función conjugada $\bar{f} = u - iv$ sean ambas holomorfas en un dominio D es igual a una constante (compleja). En efecto, por ser f y $\bar{f}$ funciones holomorfas en D, se cumple en cada punto $z = x + iy \in$ D las relaciones:

$$u_x = v_y \qquad u_x = -v_y$$

$$u_y = -v_x \qquad u_y = v_x$$

De ellas resulta $u_x = u_y = 0$, $v_x = v_y = 0$ para todo $z = x + ix \in$ D, es decir, $f'(z) = 0$ en D, lo cual implica que f es una función constante en D (teorema 4, § 3).

Ejemplo 3. Sea $f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$, en donde r, θ son las coordenadas polares de $z \neq 0$. El teorema 2 expresado en coordenadas polares afirma que la función f es holomorfa en un dominio D que no contiene el origen si, y sólo si, las derivadas parciales de u, v con respecto a r y θ son continuas en D y satisfacen en éste las ecuaciones de Cauchy-Riemann en coordenadas polares:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}, \qquad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}. \qquad [5.6]$$

La expresión de la derivada de f en un punto $z = re^{i\theta}(\theta = \operatorname{Arg}(z))$, es la siguiente:

$$f'(z) = (\cos\theta - i \operatorname{sen}\theta)\frac{\partial f}{\partial r}, \qquad [5.7]$$

en donde $\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial r} + i\frac{\partial v}{\partial r}$.

En el caso de la función $\operatorname{Log} z = \log r + i\theta$, se tiene $u = \log r$, $v = \theta$. Como estas funciones tienen derivadas continuas en el plano complejo exceptuando los puntos del semieje real negativo (véase ejemplo 5, § 2) y satisfacen en él las relaciones [5. 6] ($\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}$, $\frac{\partial v}{\partial r} = 0 = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$), se obtiene que la función $\operatorname{Log} z$ es holomorfa en dicho dominio. Además, en virtud de [5. 7]:

$$\frac{d \operatorname{Log} z}{dz} = (\cos\theta - i \operatorname{sen}\theta)\frac{1}{r} = \frac{1}{r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)} = \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{z}$$

Ejercicio

1) Probar que si $f = u + iv$ es holomorfa en un dominio D, con $u^2 + v^2$ igual a una constante real c, en D, entonces f es una constante compleja en D. (Sugerencia: en la expresión $u^2 + v^2 = c$ derívese primero con respecto a x, y luego con respecto a y, y aplíquense las ecuaciones de Cauchy-Riemann.)

3

EL TEOREMA INTEGRAL DE CAUCHY

§ 1. Curvas e Integrales Curvilíneas

Supongamos que $f = u + iv$ sea una función definida para todo número real t del intervalo cerrado $[\alpha, \beta] = \{t | \alpha \leq t \leq \beta\}$. Que f sea diferenciable en un punto $t_0 \in [\alpha, \beta]$ significa que es diferenciable en el sentido real, es decir, existe el límite:

$$\lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = f'(t_0),$$

en donde siempre se supone que $t \in [\alpha, \beta]$, además $t < t_0$ si $t_0 = \beta$ y $t > t_0$ cuando $t_0 = \alpha$. Es claro que $f'(t) = u'(t) + iv'(t)$, y f' es continua en $[\alpha, \beta]$ si, y sólo si, u' y v' son ambas continuas en $[\alpha, \beta]$. Toda función $f = u + iv$ definida en el intervalo $[\alpha, \beta]$ y tal que f' sea continua en $[\alpha, \beta]$ se llama una función *continuamente diferenciable* en $[\alpha, \beta]$.

Veamos ahora el concepto de curva. Por *curva* se entiende el conjunto imagen en $\mathbb{C}$ de toda función $z(t) = x(t) + iy(t)$ continua en un intervalo real $[\alpha, \beta]$. La curva Γ definida por una tal función: $t \to z(t)$ de $[\alpha, \beta]$ en $\mathbb{C}$ no es otra cosa que $\Gamma = \{z | z = z(t),\ t \in \in [\alpha, \beta]\}$, o sea el lugar geométrico de los puntos $z = x + iy$ tales que

$$\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \end{aligned} \qquad (t \in [\alpha, \beta]) \qquad [1.1]$$

Las relaciones [1.1] se llaman las ecuaciones paramétricas de Γ. El punto $z_0 = z(\alpha)$ recibe el nombre de *punto inicial* y $z_1 = z(\beta)$ el de *punto terminal* de Γ. Cuando t varía de α a β el punto correspondiente $z(t)$ recorre Γ desde su punto inicial hasta su punto terminal. Este sentido en que $z(t)$ recorre Γ define lo que se llama la *orientación* de Γ. La curva Γ siempre se considerará orientada en esta forma. Si Γ es la curva definida por una función $z(t)$, continua en $[\alpha, \beta]$, la curva $-\Gamma$ definida por la función $w(t) = z(\alpha + \beta - t)$ recibe el nombre de la *curva inversa* de Γ. El motivo de esta denominación es el hecho de que Γ y $-\Gamma$ coinciden como conjuntos del plano complejo, pero la orientación de $-\Gamma$ es la opuesta de la de Γ, es decir, cuando t varía de α a β el punto $z(\alpha+\beta-t)$ recorre $-\Gamma$ desde $z_1 = z(\beta)$ hasta $z_0 = z(\alpha)$, de tal modo que el punto inicial de $-\Gamma$ es el punto terminal de Γ y el punto terminal de $-\Gamma$ el punto inicial de Γ.

Una curva Γ se llama ***cerrada*** si su punto inicial coincide con su punto terminal, es decir, $z(\alpha) = z(\beta)$. Γ se llama una ***curva simple*** o un ***arco de Jordan*** si para $\alpha < t_1 < t_2 < \beta$ se tiene $z(t_1) \neq z(t_2)$. Si Γ es al mismo tiempo simple y cerrada, entonces Γ recibe el nombre de ***curva de Jordan*** o el de ***curva simple cerrada.***

Definición. Una curva Γ definida por una función $z(t) = x(t) + iy(t)$ continuamente diferenciable en $[\alpha, \beta]$ se llama una ***curva diferenciable.***

Sea ahora f una función definida para valores de $z \in \Gamma$, en donde Γ es una curva diferenciable. Si f es ***continua en*** Γ entonces la función compuesta $f(z(t))$ es continua en $[\alpha, \beta]$. Para tales funciones se define la integral de f a lo largo de Γ, $\int_\Gamma f(z)dz$, en la forma siguiente:

$$\int_\Gamma f(z)dz = \int_\alpha^\beta f[z(t)]z'(t)dt \qquad [1.2]$$

Se observará que, como la función $f(z(t))z'(t)$ es continua en $[\alpha, \beta]$, existe la integral de Riemann $\int_\alpha^\beta f[z(t)]z'(t)dt$. Una integral del tipo $\int_\Gamma f(z)dz$ se llama una *integral curvilínea con camino de integración* Γ.

Ejemplo 1. La curva $z = e^{i\theta}$ ó $x = \cos\theta$, $y = \sin\theta$ $\quad (\theta \in [0, 2\pi])$

es la circunferencia unidad y cuya orientación está dada por el movimiento opuesto al del de las manecillas del reloj. El punto $z = 1$ es a la vez el punto inicial y el punto terminal de Γ. La curva inversa $-\Gamma$ está dada por $z = e^{(2\pi-\theta)i} = e^{-i\theta}$ ó

$$x = \cos(2\pi - \theta) = \cos\theta$$

$$y = \sin(2\pi - \theta) = -\sin\theta$$

Tanto Γ como $-\Gamma$ son curvas simples cerradas y ambas son curvas diferenciables.

Ejemplo 2. Sea la curva diferenciable $|z - z_0| = r$ $(r > 0)$ o, lo que es lo mismo: $z = z_0 + re^{i\theta}$, $0 \le \theta \le 2\pi$. Γ es la circunferencia de centro en el punto z_0 y de radio r. Demostremos que si n es un número entero (positivo o negativo) entonces

$$\int_{|z-z_0|=r} (z - z_0)^n dz = \begin{cases} 2\pi i, & \text{si } n = -1 \\ 0 & \text{si } n \neq -1 \end{cases} \qquad [1.3]$$

En efecto de la definición [1.2] se sigue, teniendo en cuenta que $f(z(\theta)) = (re^{i\theta})^n$, $z'(\theta) = ire^{i\theta}$:

$$\int_{|z-z_0|=r} (z - z_0)^n dt = \int_0^{2\pi} (re^{i\theta})^n (ire^{i\theta}) d\theta = ir^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{(n+1)i\theta} d\theta =$$

$$= ir^{n+1} \int_0^{2\pi} [\cos(n + 1)\theta + i \operatorname{sen}(n + 1)\theta] d\theta.$$

Como para n entero y diferente de -1 se cumple:

$$\int_0^{2\pi} (\cos(n + 1)\theta \, d\theta = 0, \qquad \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(n + 1)\theta \, d\theta = 0.$$

Se obtiene para $n \neq -1$ que $\displaystyle\int_{|z-z_0|=r} (z - z_0)^n dz = 0.$

Cuando $n = -1$ se obtiene:

$$\int_{|z-z_0|=r} (z - z_0)^{-1} dz = i \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i.$$

Conviene observar que las relaciones [1.3] muestran que el valor de la integral curvilínea $\displaystyle\int_{|z-z_0|=r} (z - z_0)^n dz$ no depende ni del punto z_0 ni del valor r del radio de la circunferencia, sino sólamente de si n es igual o no a -1.

Ejemplo 3. Calculemos el valor de la integral de la función $f(z) = |z|$ del punto $-i$ al punto i a lo largo de tres caminos de integración Γ diferentes.

a) Sea Γ el segmento del eje imaginario que une a $-i$ con i. En este caso se tiene: $z = i\theta$, $-1 \leq \theta \leq 1$; $|z| = |\theta|$, $z'(\theta) = i$. Por lo tanto: $\int_{-i}^{i} |z|dz = i\int_{-1}^{1} |\theta|d\theta = i$.

b) Tomemos como Γ la semicircunferencia $z = e^{-i\theta}$, $\pi/2 \leq \theta \leq 3\pi/2$ ($|z| = 1$, $z'(\theta) = -ie^{-i\theta}$). Entonces:

$$\int_{-i}^{+i} |z|dz = -i\int_{\pi/2}^{3\pi/2} e^{-i\theta}d\theta = -i\int_{\pi/2}^{3\pi/2} (\cos\theta - i\ \mathrm{sen}\ \theta)d\theta = 2i.$$

c) Sea ahora Γ la semicircunferencia: $z = e^{i\theta}$, $3\pi/2 \leq \theta \leq 5\pi/2$ ($|z| = 1$, $z'(\theta) = ie^{i\theta}$). Por lo tanto:

$$\int_{-i}^{+i} |z|dz = i\int_{3\pi/2}^{5\pi/2} e^{i\theta}d\theta = i\int_{3\pi/2}^{5\pi/2} (\cos\theta + i\ \mathrm{sen}\ \theta)d\theta = 2i.$$

Una función continua $z: [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ se dice que es a ***trechos continuamente diferenciable*** si existe una descomposición del intervalo $[\alpha, \beta]$ en un número finito de subintervalos:

$$[t_0, t_1], [t_1, t_2], \ldots, [t_{n-1}, t_n] \text{ en donde } \alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = \beta,$$

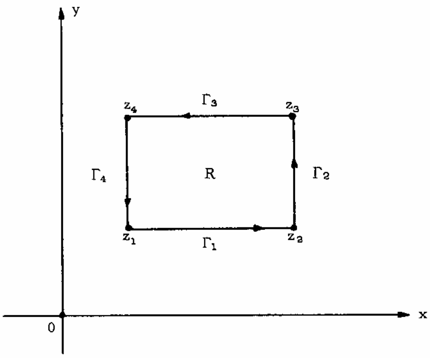
de manera que la restricción de z a cada uno de estos intervalos sea una función continuamente diferenciable. Es claro que una tal función z puede no ser diferenciable en los puntos $t_1, \ldots t_{n-1}$, los cuales son puntos interiores del intervalo $[\alpha, \beta]$.

Definición. Una curva Γ definida por una función z, continuamente diferenciable a trechos, recibe el nombre de ***camino***. Si Γ_i es la curva definida por la función $z_i: [t_{i-1}, t_i] \to \mathbb{C}$, la restricción de z al intervalo $[t_{i-1}, t_i]$, entonces diremos que el camino Γ es la ***suma*** de las curvas diferenciables $\Gamma_i (i = 1, \ldots n)$ las cuales forman naturalmente una descomposición de Γ. Esto se indica por la notación: $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \ldots + \Gamma_n$.

Por supuesto, toda curva diferenciable es un camino, pero no todo camino es una curva diferenciable, como lo muestra el siguiente ejemplo:

Ejemplo 4. Sean z_1, z_2, z_3, z_4 los vértices sucesivos de un rectángulo R de lados paralelos a los ejes de coordenadas como en la figura 5. Tomemos como Γ el borde o la periferia de dicho rectángulo, en donde suponemos que el sentido de recorrido de Γ está dado por el movimiento opuesto al del de las manecillas de un reloj. Es claro que $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4$ es un camino cerrado, en donde:

Fig. 5



$\Gamma_1 : z = z_1 + (z_2 - z_1)t, \quad 0 \leq t \leq 1$

$\Gamma_2 : z = z_2 + (z_3 - z_2)(t - 1), \; 1 \leq t \leq 2$

$\Gamma_3 : z = z_3 + (z_4 - z_3)(t - 2), \; 2 \leq t \leq 3$

$\Gamma_4 : z = z_4 + (z_1 - z_4)(t - 3), \; 3 \leq t \leq 4.$

El intervalo $[\alpha, \beta]$ es en este caso $[0, 4]$ y los subintervalos correspondientes son: $[0, 1]$, $[1, 2]$, $[2, 3]$, $[3, 4]$.

Supongamos que f sea una función continua en un contorno Γ, definido por una función $z : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$. Como el valor de la expresión $\sum_{i=1}^{n} \int_{\Gamma_i} f(z)dz$ no depende de la descomposición $\Gamma_1, \ldots \Gamma_n$ de Γ, damos por definición:

$$f(z)dz = \sum_{i=1}^{n} \int_{\Gamma_i} f(z)dz, \qquad [1.4]$$

expresión que recibe el nombre de la *integral curvilínea de f a lo largo del camino* Γ. Se observará que

$$\int_{\Gamma_i} f(z)dz = \int_{t_{i-1}}^{t_i} f[z(t)]z'(t)dt \qquad [1.5]$$

y cuando Γ es una curva diferenciable,

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \int_{\alpha}^{\beta} f[z(t)]z'(t)dt,$$

o sea que la relación [1.4] se reduce en este caso a la relación [1.2].

En el curso de cálculo (véase, por ejemplo, el capítulo 8 de la obra citada en la referencia bibliográfica (2)) se suele demostrar que la *longitud* L de una curva diferenciable Γ, dada por sus ecuaciones paramétricas $x = x(t)$, $y = y(t)$ $(\alpha \leq t \leq \beta)$, viene expresada por la fórmula $L = \int_\alpha^\beta \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt$, la cual se puede también escribir:

$$L = \int_\alpha^\beta |z'(t)|\, dt. \qquad [1.6]$$

Por otra parte, como $\sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} |z'(t)|\, dt = \int_\alpha^\beta |z'(t)|\, dt$, se obtiene la fórmula siguiente para la longitud L de un camino Γ, definido por una función $z: [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$:

$$L = \int_\alpha^\beta |z'(t)|\, dt. \qquad [1.7]$$

Nótese que la longitud del camino inverso $-\Gamma$, definido por la función $w: [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$, y en donde $w(t) = z(\alpha + \beta - t)$, es también igual a L. En efecto, como $w'(t) = -z'(\alpha + \beta - t)$, mediante el cambio de variable $\alpha + \beta - t = \tau$ se obtiene:

$$\int_\alpha^\beta |w'(t)|\, dt = \int_\alpha^\beta |z'(\alpha + \beta - t)|\, dt = -\int_\beta^\alpha |z'(\tau)|\, d\tau = \int_\alpha^\beta |z'(\tau)|\, d\tau = L.$$

Ejemplo 5. La longitud L de la circunferencia unidad Γ es 2π, ya que, para $z(\theta) = e^{i\theta}$ $(0 \leq \theta \leq 2\tau)$, se tiene $z'(\theta) = ie^{i\theta}$, $|z'(\theta)| = 1$ y por consiguiente $\int_0^{2\pi} |z'(\theta)|\, d\theta = 2\pi$.

A continuación mencionaremos sin demostración las propiedades más importantes de las integrales curvilíneas.

Teorema 1. Sean f_1 y f_2 dos funciones continuas sobre un camino Γ, y k_1, k_2 dos constantes arbitrarias. Entonces:

$$\int_\Gamma (k_1 f_1 + k_2 f_2)(z)\, dz = k_1 \int_\Gamma f_1(z)\, dz + k_2 \int_\Gamma f_2(z)\, dz.$$

Teorema 2. Sea f una función continua sobre un camino de longitud L. Si $|f(z)| \leq M$ para todo $z \in \Gamma$, entonces $\left| \int_\Gamma f(z)\, dz \right| \leq ML.$

Teorema 3. Sea f una función continua sobre un camino Γ con camino inverso $-\Gamma$. Entonces $\int_{-\Gamma} f(z)dz = -\int_{\Gamma} f(z)dz.$

Ejemplo 6. Una consecuencia inmediata del teorema 2 es la relación $\left|\int_{-1+i}^{1+i} \frac{dz}{z^2}\right| \leq 2$, en donde el camino de integración Γ es el segmento de recta (paralelo al eje real) que va de $z=-1+i$ al punto $z = 1 + i$. En efecto, se tiene para todo punto $z = z(t) = t+i$ $(-1 \leq t \leq 1)$ de Γ la relación $\frac{1}{|z^2|} \leq 1$, y por otra parte la longitud L de Γ es igual a 2.

Ejercicios

1) Demostrar la relación $\overline{\int_{|z|=1} f(z)dz} = -\int_{|z|=1} \overline{f(z)}\frac{dz}{z^2}$, en donde f es continua para $|z| = 1$.

2) Sea f continua para todo z en $0 < |z| < \mathrm{R}$ (En el punto $z = 0$, f puede ser discontinua) y $\mathrm{M}(r) = \underset{0<|z|=r<\mathrm{R}}{\mathrm{Máx}} |f(z)|$. Demostrar que si $\lim_{r\to 0} r\mathrm{M}(r) = 0$, entonces $\lim_{r\to 0}\int_{|z|=r} f(z)dz = 0$. Verificar que la condición $\lim_{r\to 0} r\mathrm{M}(r) = 0$ se cumple para $f(z) = z^n$, $n \neq -1$ (n entero), pero no para $f(z) = \frac{1}{z}$.

3) Calcular el valor de la integral $\int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2+1}$.

§ 2. El Indice de Un Camino Cerrado. Primera Demostración del Teorema Fundamental del Algebra

Definición 1. Sea Γ un camino cerrado, definido por una función $z: [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$, y ζ_0 un punto que no pertenezca a Γ. *El índice de Γ con respecto a ζ_0* es el número

$$\mathrm{I}(\Gamma, \zeta_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{dz}{z-\zeta_0} \qquad [2.1]$$

Teorema 1. $\mathrm{I}(\Gamma, \zeta_0)$ es un número entero.

Demostración. Todo se reduce a demostrar que

$$\varphi(t) = \int_{\alpha}^{t} \frac{z'(\tau)}{z(\tau) - \zeta_0}\, d\tau + k, \qquad \tau \in [\alpha, \beta], \qquad [2.2]$$

en donde k es una constante tal que $e^k = z(\alpha) - \zeta_0$ es una función continua en $[\alpha, \beta]$ que satisface la relación

$$e^{\varphi(t)} = z(t) - \zeta_0, \quad \text{para todo } t \in [\alpha, \beta] \qquad [2.3]$$

(Obsérvese que $\varphi(\alpha) = k$ no es otra cosa que un logaritmo del número $z(\alpha) - \zeta_0 \neq 0$.)

En efecto de [2.2] se deduce que $\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{dz}{z - \zeta_0} = \frac{\varphi(\alpha) - \varphi(\beta)}{2\pi i}$.

Por otra parte, [2.3] y el hecho de que Γ es una curva cerrada ($z(\alpha) = z(\beta)$) implican $e^{\varphi(\beta)} = z(\beta) - \zeta_0 = z(\alpha) - \zeta_0 = e^{\varphi(\alpha)}$, es decir, que $e^{\varphi(\beta) - \varphi(\alpha)} = 1$, de lo cual sigue, en virtud de la relación [1.38] del capítulo 1, § 1:

$$I(\Gamma, \zeta_0) = \frac{\varphi(\beta) - \varphi(\alpha)}{2\pi i} = n, \quad n \text{ entero.} \qquad [2.4]$$

A fin de demostrar [2.3] consideremos la función $h(t) = (z(t) - \zeta_0)e^{-\varphi(t)}$ continua en $[\alpha, \beta]$. Como $z(t) - \zeta_0$ y φ son diferenciables en $[\alpha, \beta]$, con la excepción de un número finito de puntos, la función h también lo es. Teniendo en cuenta que $\varphi'(t) = \frac{z'(t)}{z(t) - \zeta_0}$, se verifica fácilmente que en cada punto $t \in [\alpha, \beta]$, con la excepción de un número finito de ellos, se cumple $h'(t) = 0$, o sea, que h es una constante. Debido a $e^{\varphi(\alpha)} = z(\alpha) - \zeta_0$ se tiene que $h(\alpha) = 1$, de lo cual se sigue que $h \equiv 1$, o sea: $e^{\varphi(t)} = z(t) - \zeta_0$ para todo $t \in [\alpha, \beta]$. Esto concluye la demostración del teorema.

Teorema 2. Sea Ψ cualquier función continua en $[\alpha, \beta]$ tal que $e^{\Psi(t)} = z(t) - \zeta_0$ para todo $t \in [\alpha, \beta]$. Entonces

$$I(\Gamma, \zeta_0) = \frac{\Psi(\beta) - \Psi(\alpha)}{2\pi i} \qquad [2.5]$$

Demostración. En primer lugar, mostremos que si φ y Ψ son dos funciones continuas en $[\alpha, \beta]$ que satisfacen las relaciones $e^{\varphi(t)} = z(t) - \zeta_0$, $e^{\Psi(t)} = z(t) - \zeta_0$ para todo $t \in [\alpha, \beta]$, entonces

$$\varphi(\beta) - \varphi(\alpha) = \Psi(\beta) - \Psi(\alpha). \qquad [2.6]$$

En efecto: para todo $t \in [\alpha, \beta]$ se cumple $e^{\varphi(t) - \Psi(t)} = 1$, lo cual implica, en virtud de la relación [1.35] del cap. 1 § 1, que $\varphi(t) - \Psi(t) = 2\pi i n(t)$, en donde $n(t)$ es una función de $t \in [\alpha, \beta]$ que toma valores enteros. Como la función $n(t) = \dfrac{\varphi(t) - \Psi(t)}{2\pi i}$ es continua en $[\alpha, \beta]$, en virtud del corolario 2 del teorema 4 del cap. 2 § 2, $n(t)$ es igual a una constante n. De esto sigue: $\varphi(\beta) - \Psi(\beta) = \varphi(\alpha) - \Psi(\alpha)$, lo cual demuestra [2.6].

De acuerdo con la demostración del teorema 1 existe una función continua φ en $[\alpha, \beta]$ que satisface [2.3] y para la cual se cumple: $I(\Gamma, \zeta_0) = \dfrac{\varphi(\beta) - \varphi(\alpha)}{2\pi i}$ (fórmula [2.4]). Como $\dfrac{\Psi(\beta) - \Psi(\alpha)}{2\pi i} = \dfrac{\varphi(\beta) - \varphi(\alpha)}{2\pi i}$, se obtiene así la demostración de [2.5].

Ejemplo 1. Sea n un número entero y $r > 0$. El índice del camino cerrado Γ: $z = re^{in\theta}$, $0 \le \theta \le 2\pi$, con respecto al origen, es igual a n. En efecto $\dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_\Gamma \frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{rnie^{i\theta}d\theta}{re^{i\theta}} = n$. El mismo resultado se obtiene tomando $\Psi(\theta) = \log r + ni\theta$, $0 \le \theta \le 2\pi$, en el teorema 2.

Se observará que el número n es precisamente el número de vueltas que el punto $z = re^{ni\theta}$ da alrededor del origen cuando θ varía de 0 a 2π. Si n es positivo, las vueltas son en el sentido positivo, o sea en el sentido opuesto al del de las manecillas del reloj. Cuando n es negativo las vueltas son en el sentido de las manecillas del reloj o negativo. En ambos casos, el punto $z = re^{ni\theta}$, al girar alrededor del origen, se encuentra sobre la circunferencia $|z| = r$. Igualmente se notará que la longitud del camino cerrado, que no se debe confundir con la circunferencia $|z| = r$, es $2\pi r|n|$ y no $2\pi r$.

Observación. Conocido el índice $I(\Gamma, \zeta_0)$ de un camino cerrado con relación a ζ_0 es fácil determinar el índice de su camino inverso $-\Gamma$ con respecto al mismo punto ζ_0 por medio de la fórmula, de fácil verificación:

$$I(-\Gamma, \zeta_0) = -I(\Gamma, \zeta_0). \qquad [2.7]$$

Sean Γ un camino cerrado y Ω el conjunto de los puntos del plano complejo que no están en Γ, es decir $\Omega = \mathbb{C} - \Gamma$. De acuerdo con el teorema 1, la función

$$\Psi(\zeta) = I(\Gamma, \zeta) \qquad (\zeta \in \Omega) \qquad [2.8]$$

es una aplicación de Ω en el conjunto Z de los números enteros. Su valor en un punto $\zeta \in \Omega$ es el índice de Γ con respecto a ζ.

Teorema 3. La función $\Psi : \Omega \to Z$, definida por la relación [2.8], es continua en Ω.

Demostración. A fin de demostrar que Ψ es continua en cada punto $\zeta_0 \in \Omega$, consideremos la expresión $\Psi(\zeta) - \Psi(\zeta_0) = \frac{(\zeta - \zeta_0)}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{dz}{(z-\zeta)(z-\zeta_0)} (\zeta \in \Omega)$. Como $[\alpha, \beta]$ es un conjunto compacto y $z : [\alpha, \beta] \to C$ es una función continua, en virtud del teorema 3 del cap. 2 § 2 $\Gamma = z([\alpha, \beta])$ es un conjunto compacto. El corolario del mismo teorema nos dice que la función $f(z) = |z - \zeta_0|$, $z \in \Gamma$, que es positiva y continua en Γ, alcanza su mínimo $\rho > 0$ en un punto $z_0 \in \Gamma$. Por consiguiente, $\rho > 0$ es un número tal que $|z - \zeta_0| \geq \rho$ para todo $z \in \Gamma$.

Supongamos que ζ sea un punto tal que $|\zeta - \zeta_0| \leq \frac{\rho}{2}$. Entonces se cumple $|z - \zeta| = |(z - \zeta_0) - (\zeta - \zeta_0)| \geq |z - \zeta_0| - |\zeta - \zeta_0| \geq \frac{\rho}{2}$.

60 Aplicando ahora el teorema 2 del § 1 y teniendo en cuenta que $\frac{1}{(z-\zeta)(z-\zeta_0)} \leq \frac{2}{\rho^2}$ se obtiene $|\Psi(\zeta) - \Psi(\zeta_0)| \leq |\zeta - \zeta_0| \frac{L}{\pi\rho^2}$, en donde L es la longitud de Γ.

De esta relación se sigue que, dado $\epsilon > 0$ y tomando $\delta = \operatorname{Min}\left(\frac{\rho}{2}, \frac{\pi\rho^2\epsilon}{L}\right)$, se cumple $|\Psi(\zeta) - \Psi(\zeta_0)| < \epsilon$ si $|\zeta - \zeta_0| < \delta$, o sea que Ψ es continua en ζ_0.

Corolario 1. La función Ψ es constante en cada subconjunto conexo D de Ω.

Esto es consecuencia inmediata del corolario 2 del teorema 4 del cap. 2, § 2, y del teorema que se acaba de demostrar.

Corolario 2. Si Γ es un camino cerrado que se encuentra dentro de un disco $D = \{z \mid |z - z_0| < R\}$, entonces $I(\Gamma, \zeta) = 0$ para todo punto ζ exterior al disco D.

Demostración. Como $C - D = \{z \mid |z - z_0| \geq R\}$ es un subconjunto conexo de $\Omega = C - \Gamma$, en virtud del corolario 1 $I(\Gamma, \zeta)$ es constante en $C - D$. Por otra parte, el valor de la constante es cero, ya que dado $\epsilon > 0$, es posible encontrar $|\zeta|$ suficiente grande de modo que

$\left|\frac{1}{z(t)-\zeta}\right| \le \frac{2\pi\varepsilon}{L}$ para todo $z \in \Gamma$, en donde L es la longitud de Γ. Esto implica, de acuerdo con el teorema 2, § 1, que $|I(\Gamma, \zeta)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_\Gamma \frac{dz}{z-\zeta}\right| \le \varepsilon$.

Ejemplo 2. Como aplicación de la noción de índice demostremos que $\int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2+1} = 0$.

En efecto, el índice del camino cerrado $z = 2e^{i\theta}$, $0 \le \theta \le 2\pi$, con respecto al origen, es igual a 1 (ejemplo 1). Por consiguiente, en virtud del corolario 1 del teorema 3, $I(\Gamma, \zeta) = 1$ en el disco abierto $|\zeta| < 2$ y, en particular, para $\zeta = \pm i$. De esto se sigue que $\int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2+1} = \int_{|z|=2} \frac{-i}{2(z-i)} + \frac{i}{2(z+i)}\, dz = -\frac{i}{2}\int_{|z|=2} \frac{dz}{z-i} + \frac{i}{2}\int_{|z|=2} \frac{dz}{z+i} = \pi[I(\Gamma, i) - I(\Gamma, -i)] = 0$.

61

Lema. Sean Γ_1 y Γ_2 dos caminos cerrados que no pasan por el origen, definidos por las funciones $z_1: [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$, $z_2: [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$, respectivamente. El camino Γ, definido por la función $z(t) = z_1(t) \cdot z_2(t)$, no contiene el origen, y su índice con respecto al origen está dado por

$$I(\Gamma, 0) = I(\Gamma_1, 0) + I(\Gamma_2, 0). \qquad [2.9]$$

Demostración. Sólo demostraremos la parte no trivial del lema, es decir la fórmula [2.9]. Con tal objeto, tomemos dos funciones φ_1 y φ_2 continuas en $[\alpha, \beta]$, tales que $e^{\varphi_1(t)} = z_1(t)$, $e^{\varphi_2(t)} = z_2(t)$ para todo $t \in [\alpha, \beta]$. La función $\varphi(t) = \varphi_1(t) + \varphi_2(t)$ goza de la propiedad $e^{\varphi(t)} = z(t)$ para todo $t \in [\alpha, \beta]$. Por consiguiente, en virtud del teorema 2 se obtiene:

$$I(\Gamma, 0) = \frac{\varphi(\beta) - \varphi(\alpha)}{2\pi i} = \frac{\varphi_1(\beta) - \varphi_1(\alpha)}{2\pi i} + \frac{\varphi_2(\beta) - \varphi_2(\alpha)}{2\pi i} = I(\Gamma_1, 0) + I(\Gamma_2, 0),$$

lo cual demuestra [2.9].

Teorema 4. Sean Γ_1 y Γ_2 dos caminos cerrados definidos por las funciones $z_1: [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ y $z_2: [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$, respectivamente. Si Γ_2 no pasa por el origen y si $|z_1(t)| < |z_2(t)|$ para todo $t \in [\alpha, \beta]$, entonces el camino cerrado Γ, definido por la función $z(t) = z_1(t) + z_2(t)$, no contiene el origen y, además, se cumple

$$I(\Gamma, 0) = I(\Gamma_2, 0) \qquad [2.10]$$

Demostración. Como, por un lado, se tiene

$$z(t) = z_2(t)\left(1 + \frac{z_1(t)}{z_2(t)}\right), \quad \text{con} \left|\frac{z_1(t)}{z_2(t)}\right| < 1,$$

y, por otro, el camino cerrado Γ_3 definido por la función $z_3(t) = 1 + \frac{z_1(t)}{z_2(t)}$, debido a $|z_3(t) - 1| < 1$, se encuentra dentro del disco $D = \{z \mid |z - 1| < 1\}$, se obtiene, como consecuencia del corolario 2 del teorema 3 y del lema anterior:

$$I(\Gamma, 0) = I(\Gamma_2, 0) + I(\Gamma_3, 0) = I(\Gamma_2, 0).$$

Como una aplicación importante de la noción de índice damos a continuación una demostración del teorema fundamental del Algebra.

Teorema 5. Todo polinomio $P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n$ de grado $n \geq 1$ y coeficientes complejos tiene por lo menos una raíz, es decir, existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $P(z_0) = 0$.

Demostración. En primer lugar, notemos que para $|z| = R > 0$ suficientemente grande $\left|\frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \ldots + \frac{a_n}{z^n}\right| < 1$, o sea que para un tal R:

$$|a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \ldots + a_n| < |z|^n \quad \text{para } |z| \geq R. \; [2.11]$$

Consideremos ahora los caminos cerrados Γ_1 y Γ_2 definidos por las funciones siguientes:

$$z_1(\theta) = a_1(Re^{i\theta})^{n-1} + a_2(Re^{i\theta})^{n-2} + \ldots + a_n, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi;$$

$$z_2(\theta) = (Re^{i\theta})^n, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Claro está $0 \notin \Gamma_2$. Como en virtud de [2.11] se tiene $|z_1(\theta)| < |z_2(\theta)|$ para todo $\theta \in [0, 2\pi]$, y, por otra parte, $I(\Gamma_2, 0) = n$ (véase el ejemplo 1), resulta del teorema 4:

$$I(\Gamma, 0) = n > 0, \qquad [2.12]$$

en donde Γ es el camino cerrado definido por

$$z(\theta) = z_1(\theta) + z_2(\theta) = P(Re^{i\theta}), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

A fin de demostrar el teorema probaremos a continuación que si el polinomio $P(z)$ no se anulara en ningún punto del disco $D = \{z \mid |z| < R\}$ entonces $I(\Gamma, 0)$ tendría que ser igual a cero, lo cual contradice [2.12].

En efecto, podemos hacer corresponder a cada r en el intervalo $[0, R]$ el camino cerrado Γ_r definido por la función $z_r(\theta) = P(re^{i\theta})$. En virtud de la hipótesis, $0 \notin \Gamma_r$. Por otra parte, la función

$$\varphi(r) = I(\Gamma_r, 0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_r} \frac{dz}{z} = \frac{r}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{P'(re^{i\theta})e^{i\theta}}{P(re^{i\theta})}d\theta$$

es continua en $[0, R]$ y sólo toma valores enteros. De esto resulta que φ es una función constante. Como el contorno Γ_0 se reduce al punto a_n, $\varphi(0) = I(\Gamma_0, 0) = 0$, lo cual implica $I(\Gamma, 0) = \varphi(R) = \varphi(0) = 0$, que es la contradicción que se deseaba establecer.

§ 3. El Teorema Integral de Cauchy

Supongamos que f sea holomorfa en un dominio D. Una función f, holomorfa en D, se llama una *primitiva* de f en D si $F'(z) = f(z)$ por todo $z \in D$.

Lema 1. Sea F una primitiva de f en D y Γ un camino en D con punto inicial z_1 y punto terminal z_2. Entonces

$$\int_\Gamma f(z)dz = F(z_2) - F(z_1). \qquad [3.1]$$

Demostración. Sea $z = z(t)$, $\alpha \le t \le \beta$, la ecuación de Γ y $[t_0, t_1], \ldots, [t_{n-1}, t_n]$, con $\alpha = t_0 < t_1 \ldots < t_n = \beta$, los subintervalos en los cuales $z(t)$ es continuamente diferenciable. Por definición se tiene:

$$\int_\Gamma f(z)dz = \sum_{i=1}^{i=n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} f[z(t)]\, z'(t)dt.$$

Por otra parte, en virtud de la hipótesis,

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} f[z(t)]z'(t)dt = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{d}{dt} F[z(t)]dt = F[z(t_i)] - F[z(t_{i-1}]$$

Como $\sum_{i=1}^{i=n} F[z(t_i)] - F[z(t_{i-1})] = F[z(\beta)] - F[z(\alpha)] = F(z_2) - F(z_1)$, se cumple [3.1].

Corolario. Para todo camino cerrado Γ en un dominio D, en donde f posee una primitiva, se cumple

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = 0 \qquad [3.2]$$

Observación. Una consecuencia del corolario anterior es la relación $\int_{|z-z_0|=r} (z-z_0)^n dz = 0$, sea cual fuere el entero $n \neq -1$, ya que $F(z) = \dfrac{(z-z_0)^{n+1}}{n+1}$ es una primitiva de $f(z) = (z-z_0)^n$ (véase ejemplo 2, § 1).

A fin de formular ciertas propiedades fundamentales de las funciones holomorfas definimos a continuación la noción de ***orientación positiva*** (o ***negativa***) de un camino simple y cerrado Γ. Según un teorema clásico de C. Jordan, todo camino simple y cerrado Γ divide al plano complejo en dos dominios disyuntos D_1, D_2, uno de los cuales es acotado. Al dominio acotado lo llamaremos el ***interior*** de Γ y el no acotado el ***exterior*** de Γ. Si D_1 es, por ejemplo, el interior de Γ diremos que Γ está orientado positivamente si el sentido de recorrido de Γ es tal que D_1 queda siempre a la izquierda. En el caso contrario, diremos que Γ está orientado negativamente. Cuando Γ es una circunferencia, su orientación es positiva si se recorre en el sentido opuesto al del de las agujas del reloj, y negativa, si se recorre en el sentido en que se mueven aquéllas.

Nota. Una definición rigurosa de lo que se entiende por la orientación positiva de un camino simple cerrado Γ se puede dar en términos de la noción de índice en la forma siguiente: Γ está orientada positivamente si, y sólo si, $I(\Gamma, \zeta) = 1$ para todo $\zeta \in D_1$ (D_1 = interior de Γ). Más adelante (corolario del teorema 1, cap. 4, § 1) se verá que esta definición coincide con la puramente intuitiva que se ha dado aquí y en la cual se supone conocido el significado de la expresión: "D_1 queda siempre a la izquierda".

Lema 2. (Goursat). Sea f holomorfa en un dominio D, y R un rectángulo contenido en D, cuyos lados son paralelos a los ejes coordenados. Si Γ es el borde de R, entonces

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = 0. \qquad [3.3]$$

Demostración. Dividamos el rectángulo R en cuatro subrectángulos iguales R_i con bordes $\Gamma_i (i = 1, \ldots, 4)$. Supongamos que tanto Γ como $\Gamma_i (i = 1, \ldots, 4)$ estén orientados en la misma forma, por ejemplo, positivamente (véase la Fig. 6). Es claro que $\int_{\Gamma} f(z)dz = \sum_{i=1}^{i=4} \int_{\Gamma_i} f'(z)dz$.

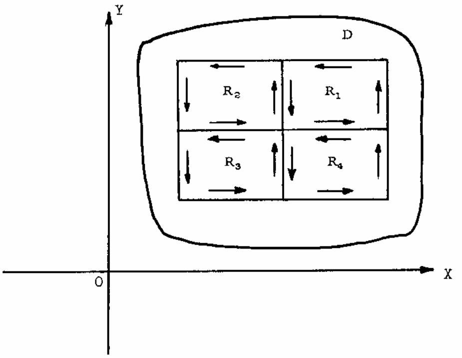


Fig. 6

Adoptemos la notación siguiente: $J = |\int_{\Gamma} f(z)dz|$. Como de los cuatro rectángulos $R_i (i = 1, \ldots, 4)$ hay uno, R_k con borde Γ_k, tal que $|\int_{\Gamma_i} f(z)dz| \leq |\int_{\Gamma_k} f(z)dz| \quad (i = 1, \ldots, 4)$, tenemos que $|\int_{\Gamma} f(z)dz| \leq 4|\int_{\Gamma_k} f(z)dz|$. Denotando ahora R_k con $R^{(1)}$ y su borde con $\Gamma^{(1)}$, obtenemos $J \leq 4 \cdot J_1$, en donde $J_1 = |\int_{\Gamma^{(1)}} f(z)dz|$.

Dividiendo el rectángulo $R^{(1)}$en cuatro subrectángulos, de la misma manera en que dividimos a R, obtenemos nuevamente un subrectángulo $R^{(2)}$ con borde $\Gamma^{(2)}$ tal que $J_1 \leq 4J_2$, en donde $J_2 = |\int_{\Gamma^{(2)}} f(z)dz|$. Continuando este mismo proceso en forma indefinida obtenemos una sucesión de rectángulos $R \supset R^{(1)} \supset R^{(2)} \supset \ldots$ y además las desigualdades $J_n \leq 4J_{n+1}$, en donde

$$J_n = |\int_{\Gamma^{(n)}} f(z)dz|,$$

siendo $\Gamma^{(n)}$ el borde de $R^{(n)}$. De esto se deduce que

$$J \leq 4^n J_n \qquad (n = 1, 2, \ldots) \qquad [3.4]$$

Denotemos con L el perímetro de R y con L_n el perímetro de $\Gamma^{(n)}$. Como $L_1 = \frac{1}{2} L$, $L_2 = \frac{1}{2} L_1, \ldots$, se obtiene

$$L_n = (\tfrac{1}{2})^n L \quad (n = 1, 2, \ldots) \qquad [3.5]$$

En virtud del teorema 5, cap. 1, § 2, existe un punto $z_0 \in \bigcap_{n=1}^{n=\infty} R^{(n)}$ y en particular $z_0 \in R$. Por consiguiente f es holomorfa en z_0. Por otra parte de la definición de $f'(z_0)$ se sigue que la función

$$\lambda(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0), & \text{si } z \neq z_0, \\ 0 & \text{si } z = z_0, \end{cases} \qquad [3.6]$$

satisface

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \lambda(z)(z - z_0), \quad \lim_{|z - z_0| \to 0} \lambda(z) = 0 \qquad [3.7]$$

Por consiguiente

$$\int_{\Gamma^{(n)}} f(z)dz = f(z_0)\int_{\Gamma^{(n)}} dz + f'(z_0)\int_{\Gamma^{(n)}} (z - z_0)dz + \int_{\Gamma^{(n)}} \lambda(z)(z - z_0)dz \qquad [3.8]$$

En virtud del corolario del lema 1 se tiene $\int_{\Gamma^{(n)}} dz = 0$, $\int_{\Gamma^{(n)}} (z - z_0)dz =$

$= 0$, de modo que

$$J_n = \left|\int_{\Gamma^{(n)}} f(z)dz\right| \le \max_{z \in \Gamma^{(n)}} |\lambda(z)(z - z_0)| = \lambda_n \max_{z \in \Gamma^{(n)}} |z - z_0| L_n, \qquad [3.9]$$

en donde $\lambda_n = \max_{z \in \Gamma^{(n)}} |\lambda(z)|$. Cuando $n \to \infty$, $\underset{z \in \Gamma^{(n)}}{|z - z_0|} \to 0$ y, por consiguiente, debido a [3.7], $\lim_{n \to \infty} \lambda_n = 0$. Por otra parte como z y z_0 son puntos de $R^{(n)}$ se tiene $|z - z_0| \le \frac{L_n}{2}$, de modo que

$$J_n \le \frac{L_n^2}{2}\lambda_n \qquad [3.10]$$

$$J \le 4^n J_n \le \frac{\lambda_n}{2}(4^n L_n^2) = \frac{\lambda_n}{2} L^2. \qquad [3.11]$$

Como $\lim_{n \to \infty} \lambda_n = 0$, dado $\varepsilon > 0$ se puede tomar n suficientemente grande de modo que

$$\left|\int_{\Gamma} f(z)dz\right| = J \le \frac{\lambda_n}{2} L^2 < \varepsilon,$$

lo cual prueba [3.3].

Definición. Un dominio D se llama simplemente conexo si todo camino simple y cerrado contenido en D tiene en su interior sólo puntos de D.

Por ejemplo, tanto $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$ como el anillo $S = \{z \mid 1 < |z| < 3\}$, son dominios no simplemente conexos, ya que en ambos casos la circunferencia $|z| = 2$ tiene en su interior el origen, el cual no pertenece ni a $\mathbb{C}^*$ ni a S. Naturalmente, todo círculo $\{z \mid |z - z_0| < r, \ r > 0\}$ es simplemente conexo. Expresando la definición anterior en términos comunes y corrientes: un dominio D es simplemente conexo si, y sólo si, D no posee huecos.

Teorema 1 (Teorema integral de Cauchy). Sea f holomorfa en un dominio simplemente conexo D. Entonces, por todo camino cerrado Γ en D se cumple

$$\int_\Gamma f(z)dz = 0. \tag{3.12}$$

Demostración (para el caso de un círculo). La demostración consiste sencillamente en establecer que f posee una primitiva en el círculo D, viniendo a ser entonces la fórmula [3.12] una consecuencia del corolario del lema 1. La primitiva F se define en la forma siguiente:

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta, \tag{3.13}$$

donde el camino de integración, que va de un punto z_0 fijo en D al punto variable $z \in D$, consta de un segmento horizontal y otro vertical. Naturalmente, para que F esté bien definida hay que verificar que si se conecta z_0 con z por medio de dos caminos Γ_1, Γ_2 de ese tipo, entonces $\int_{\Gamma_1} f(z)dz = \int_{\Gamma_2} f(z)dz$, lo cual se hace aplicando el lema de Goursat. En efecto (véase la Fig. 7):

$$\int_{\Gamma_2} f(z)dz - \int_{\Gamma_1} f(z)dz = \int_{\Gamma_2 - \Gamma_1} f(z)dz = 0$$

en donde $\Gamma_2 - \Gamma_1$ es el borde, orientado positivamente, de un rectángulo R contenido en D.

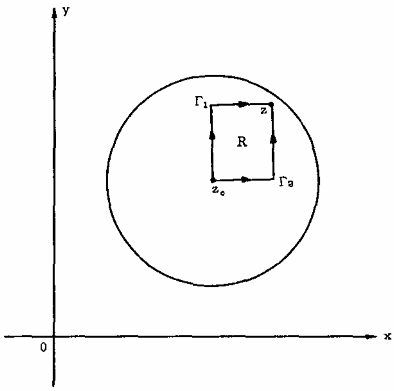


Fig. 7

Para demostrar que F es holomorfa en D y $F'(z) = f(z)$ para todo $z \in D$, basta establecer la relación

$$f(z) = \frac{\partial F}{\partial x}(z) = -i\frac{\partial F}{\partial y}(z) \qquad (z \in D). \qquad [3.14]$$

En efecto, si $F = u + iv$, entonces se sigue de [3.14] que

$$u_x + iv_x = -i(u_y + iv_y) = v_y - iu_y,$$

de lo cual resulta que se cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann: $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$. Por otra parte, como f es continua en D, de la relación [3.14] resulta la continuidad de u_x, u_y, v_x, v_y, lo cual prueba que F es holomorfa y $F'(z) = f(z)$ (teorema 1, cap. 2, § 5).

Demostremos que $f(z) = \frac{\partial F}{\partial x}(z)$, o sea que, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\left|\frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z)\right| \leq \varepsilon, \quad \text{cuando } h \text{ es real y } 0 < |h| < \delta.$$

De la definición [3.13] resulta que $F(z+h) - F(z) = \int_\Gamma f(\zeta)d\zeta$, en donde Γ es el segmento, paralelo al eje real, de ecuación $\zeta = z + ht$, $0 \leq t \leq 1$. Por lo tanto:

$$\left|\frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z)\right| = \left|\int_0^1 f(z+ht)dt - \int_0^1 f(z)dt\right| =$$

$$= \left|\int_0^1 [f(z+ht) - f(z)]\,dt\right| \leq \max_{0 \leq t \leq 1} |f(z+ht) - f(z)|.$$

Debido a la continuidad de f, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|f(z+ht) - f(z)| < \varepsilon$ si $|ht| < \delta$. Por lo tanto, si $|h| < \delta$, entonces $|ht| \leq |h| < \delta$ de modo que se cumple $|f(z+ht) - f(z)| < \varepsilon$ para todo t, $0 \leq t \leq 1$. De esto se sigue que para $|h| < \delta$

$$\left|\frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z)\right| \leq \varepsilon.$$

La demostración de $f(z) = -i\frac{\partial F}{\partial y}(z)$ es análoga a la anterior y la dejamos como ejercicio a cargo del lector.

Nota. Una formulación mucho más general y al mismo tiempo una demostración elegante del teorema integral de Cauchy, basada en la noción de homología, la puede encontrar el lector en la obra de L. V. Ahlfors (1).

Ejemplo 1. El índice $I(\Gamma, \zeta)$ de un camino simple cerrado Γ con respecto a todo punto ζ exterior a él es igual a cero. En efecto, la función $f(z) = \frac{1}{z - \zeta}$ es holomorfa en el dominio simplemente conexo formado por el interior de Γ y, por consiguiente, de [3.12] resulta

$$I(\Gamma, \zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{dz}{z - \zeta} = 0.$$

Ejemplo 2. La relación [3.12] puede no cumplirse si f es holomorfa en un dominio que no es simplemente conexo. Tal es el caso de la función $f(z) = \frac{1}{z}$, holomorfa en el dominio anular $D = \{z \mid 1 < |z| < 3\}$, ya que, como hemos visto ([1.3], cap. 3, § 1):

$$\int_{|z|=2} \frac{dz}{z} = 2\pi i.$$

4

ANALITICIDAD DE LAS FUNCIONES HOLOMORFAS

§ 1. La Fórmula Integral de Cauchy

Teorema 1. Sea f holomorfa en un dominio D y Γ un camino simple cerrado orientado positivamente y tal que tanto Γ como su interior se encuentren en D. Entonces para todo punto z_0 interior a Γ se cumple la fórmula integral de Cauchy

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz. \qquad [1.1]$$

Demostración. Sea r un número positivo tal que el círculo $\{z \mid |z - z_0| < r\}$ esté en el interior de Γ. Supongamos además que el borde C de dicho círculo esté orientado positivamente. El dominio anular R comprendido entre C y Γ no es simplemente conexo, sin embargo lo podemos dividir en dos partes R_1, R_2 simplemente conexas por medio de dos segmentos $\Gamma_1 = P_1 Q_1$, $\Gamma_2 = P_2 Q_2$, como en la Fig. 8, en donde P_1, P_2 son puntos de C y Q_1, Q_2 puntos de Γ.

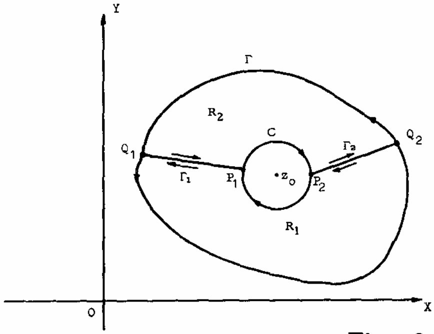


Fig. 8

De acuerdo con el teorema integral de Cauchy, aplicado a la función $g(z) = \frac{f(z)}{z - z_0}$ holomorfa en R, la integral de g, tanto a lo largo del borde de R_1 como del borde de R_2, es igual a cero. Por consiguiente, la suma de ambas integrales es también igual a cero. Por otra parte, teniendo en cuenta que

$$\int_{\Gamma_1 + (-\Gamma_1) + \Gamma_2 + (-\Gamma_2)} g(z)\, dz = 0$$

$$\int_{\Gamma + (-C)} g(z)\, dz = \int_{\Gamma} g(z)\, dz - \int_{C} g(z)\, dz$$

se obtiene la relación

$$\int_{\Gamma} g(z)dz = \int_{C} g(z)dz \qquad [1.2]$$

De [1.2] resulta que para derivar la fórmula [1.1] basta demostrar

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C} g(z)dz\,. \qquad [1.3]$$

La demostración de [1.3] se hace utilizando la función λ definida en [3.6], cap. 3, ya que entonces se obtiene

$$g(z) = \frac{f(z)}{z-z_0} = f(z_0)\frac{1}{z-z_0} + f'(z_0) + \lambda(z). \qquad [1.4]$$

Integrando en [1.4] a lo largo de C y teniendo en cuenta que $\int_{C} dz = 0$, $\int_{C} \frac{dz}{z-z_0} = 2\pi i$ (véase [1.3] en cap. 3), se obtiene

$$\int_{C} g(z)dz = 2\pi i f(z_0) + \int_{C} \lambda(z)dz \qquad [1.5]$$

$$\left|\int_{C} g(z)dz - 2\pi i f(z_0)\right| \leq \max_{|z-z_0|=r} |\lambda(t)|\cdot 2\pi r \qquad [1.6]$$

Debido a $\lim_{|z-z_0|\to 0} \lambda(z) = 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\max_{|z-z_0|=r<\delta} |\lambda(z)| \leq$ ≤ 1. Por consiguiente, dado cualquier $\epsilon > 0$ y tomando r menor que δ y $\frac{\epsilon}{2\pi}$ se obtiene de [1.6]

$$\left|\int_{C} g(z)dz - 2\pi i f(z_0)\right| < \epsilon, \qquad [1.7]$$

lo cual demuestra [1.3] .

Corolario. Sea Γ un camino simple cerrado cualquiera. Γ está orientado positivamente si, y sólo si, para todo punto ζ interior a Γ se tiene $I(\Gamma, \zeta) = 1$.

Demostración. Si Γ está orientado positivamente, la fórmula [1.1] aplicada a $f(z) \equiv 1$ nos da que $I(\Gamma,\zeta) = 1$ para todo ζ interior a Γ. Viceversa, si $I(\Gamma,\zeta) = 1$ en un punto ζ interior a Γ, entonces Γ está orientado positivamente, ya que si estuviera orientado negativamente el camino $-\Gamma$ estaría orientado positivamente y la fórmula [1.1] nos daría $I(\Gamma, \zeta) = - I(-\Gamma, \zeta) = -1$.

Nota. La fórmula [1.1] es realmente asombrosa pues expresa que los valores que toma una función holomorfa en el interior de un camino simple cerrado Γ están completamente determinados por los valores que toma sobre Γ.

Ejercicio

Sea Γ la elipse $x = a \cos\theta$
$y = b \,\text{sen}\,\theta$,

en donde $a > 0$, $b > 0$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Calcular la integral $\int_\Gamma \frac{dz}{z}$ directamente y por medio de [1. 1], y deducir de ello, tomando partes imaginarias, la expresión

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a^2 \cos^2\theta + b^2 \sin^2\theta} = \frac{2\pi}{ab} .$$

§ 2. Desarrollo de Taylor de Una Función Holomorfa

Teorema 1. Sea f holomorfa en un dominio D, y z_0 un punto de D. Entonces, en todo círculo $\{z \mid |z - z_0| < r\}$ contenido con su borde $|z - z_0| = r$ en D, f se puede representar por una serie de potencias (de radio de convergencia $R \geq r > 0$):

$$f(z) = \sum_0^\infty a_n (z - z_0)^n , \qquad [2.1]$$

en donde los coeficientes a_n están dados por

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \qquad [2.2]$$

Nota. Este resultado se conoce como el *desarrollo de Taylor de f en el punto z_0*. En [2.2] se supone que la circunferencia $|\zeta - z_0| = r$ está orientada positivamente.

Demostración. Sea Γ el borde, orientado positivamente, del círculo $V_r(z_0) = \{z \mid |z - z_0| < r\}$ contenido en D. Como para todo $z \in V_r(z_0)$, se tiene $|z - z_0| < |\zeta - z_0| = r$, o sea

$$\frac{|z - z_0|}{|\zeta - z_0|} < 1$$

se cumple en virtud del ejemplo 4, cap. 1, § 3:

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \frac{1}{\zeta - z_0} \sum_0^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^n$$

Por consiguiente, en virtud de la fórmula [1.1] se obtiene

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \sum_0^{\infty} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n d\zeta. \qquad [2.3]$$

La serie $\sum_0^{\infty} g_n(\zeta)$ en [2.3], con $g_n(\zeta) = \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n$, z supuesto fijo, goza de la propiedad, fácil de verificar, de que dado $\varepsilon > 0$, existe un entero positivo N tal que para $n > N$

$$\left|\sum_{n+1}^{n+p} g_n(\zeta)\right| < \varepsilon \qquad \text{para todo } \zeta \in \Gamma \text{ y } p = 1, 2, \ldots$$

(Criterio de Cauchy de convergencia uniforme de $\sum_0^{\infty} g_n(\zeta)$ en Γ.)

De esto resulta que

$$\int_\Gamma \left(\sum_0^{\infty} g_n(\zeta)\right) d\zeta = \sum_0^{\infty} \int_\Gamma g_n(\zeta) d\zeta, \quad \text{es decir}$$

$$f(z) = \sum_0^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\right] (z - z_0)^n$$

lo cual demuestra [2.1], en donde $a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta.$

La validez de [2.2] resulta entonces del teorema 3, cap. 2, § 4. La relación $R \geq r$ resulta de la definición de radio de convergencia.

Observación 1. El teorema anterior permite explicar el siguiente hecho, que no tiene explicación alguna en la teoría de las funciones de variable real: la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ tiene una representación en series de potencias en el intervalo $(-1, +1)$ dada por

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots,$$

a pesar de que la función f es indefinidamente diferenciable para todo x, y en particular para $x = \pm 1$. Sin embargo, si se considera la función compleja correspondiente $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ se ve enseguida que dicha función es holomorfa en todo $\mathbb{C}$, con excepción de los puntos $z = \pm i$, en los cuales $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ ni siquiera está definida. De acuerdo con el teorema 1, la función $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ tiene como desarrollo de Taylor alrededor del origen (véase también ejemplo 4, cap. 1, § 3):

$$f(z) = 1 - z^2 + z^4 - z^6 + \dots,$$

con radio de convergencia igual a 1 y por consiguiente la serie $1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots$ no puede converger si $|x| \geq 1$.

Corolario 1. Toda función holomorfa en un dominio es indefinidamente diferenciable en dicho dominio.

Demostración. El corolario es una simple consecuencia del teorema 1 y del teorema 3, cap. 2, § 4.

Observación 2. De acuerdo con el corolario 1, si una función f es diferenciable (en el sentido complejo) en un dominio D, entonces f es indefinidamente diferenciable en D. Esta propiedad de la derivación compleja no se cumple en la diferenciación real: la función de la variable real x

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} & \text{si } x \geq 0 \\ -\frac{x^2}{2} & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

es diferenciable en cada punto x, y sin embargo, no existe la segunda derivada de f en el origen, ya que la función $f'(x) = |x|$ no es diferenciable para $x = 0$.

Definición. Una función f se dice que es *analítica* en un dominio D si cada punto $z_0 \in$ D posee una vecindad en la cual f está representada por una serie (convergente) de potencias.

De acuerdo con el teorema 1, toda función holomorfa es analítica. Por otra parte, según el teorema 2, cap. 2, § 4, toda función analítica es holomorfa, o sea que tenemos:

Corolario 2. Una función es holomorfa en un dominio si, y sólo si, f es analítica en tal dominio.

Nota. La teoría de las funciones de una variable compleja se puede desarrollar a partir de dos puntos de vista distintos: si se parte de la noción de derivada compleja y se toma como idea fundamental la de función holomorfa, se suele decir que la teoría se desarrolla a la manera de Riemann; si se prefiere operar con series de potencias y se toma la noción de función analítica como idea fundamental, se acostumbra a decir que la teoría se desarrolla a la manera de Weierstrass.

Ejercicios

1) Demostrar que si f es holomorfa en el círculo $D = \{z \mid |z| < 1\}$, y tal que $f^{(n)}(0) = 0$, $n = 0,1,2,\ldots$, entonces f es idénticamente igual a cero en D.

2) Demostrar que si $z \in \mathbb{C}$, se cumple.

$$e^z = \sum_0^\infty \frac{z^n}{n!}.$$

§ 3. El Teorema de Liouville. Segunda Demostración del Teorema Fundamental del Algebra

Supongamos f holomorfa en un dominio D. De la relación [2.2] vamos a deducir varios resultados importantes. En primer lugar, obsérvese que de ella resulta que las derivadas de f en un punto $z_0 \in D$ están dadas por las *fórmulas integrales de Cauchy:*

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n}{2\pi i} \int_{|z-z_0| = r} \frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^{n+1}} \qquad n = 1,2,\ldots \qquad [3.1]$$

en las cuales r es el radio de un círculo cualquiera de centro z_0 contenido en D, como en el teorema 1, § 2.

Denotemos ahora con $M(r)$ el máximo de $f(z)$ sobre la circunferencia $|z - z_0| = r$. De [2.2] resulta entonces

$$|a_n| = \frac{|f^{(n)}(z_0)|}{n!} \leq \frac{M(r)}{r^n} \qquad n = 0,1,2,\ldots \qquad [3.2]$$

Estas desigualdades se conocen con el nombre de las *desigualdades de Cauchy*.

Teorema 1 (Teorema de Liouville). Cualquier función holomorfa y acotada en todo el plano complejo es igual a una constante.

Demostración. Sea f una tal función, para la cual existe, por hipótesis, una constante $M > 0$ tal que $|f(z)| < M$ para todo $z \in \mathbb{C}$. De esto se sigue que, para todo $r > 0$, $M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)| \leq M$.

Por otra parte, como f es holomorfa en todo $\mathbb{C}$, f está representada en $\mathbb{C}$ por la serie de potencias (desarrollo de Taylor de f alrededor del origen):

$$f(z) = \sum_{0}^{\infty} a_n z^n .$$

Para demostrar el teorema basta probar que los coeficientes a_n $n = 1, 2, \ldots$ son todos iguales a cero. f será, por consiguiente, igual al coeficiente a_0.

En efecto, de [3.2] y de $M(r) \leq M$ resulta

$$|a_n| \leq \frac{M}{r^n}, \qquad n = 1, 2 \ldots \qquad [3.3]$$

Para n fijo ($n = 1, 2, \ldots$) y dado cualquier $\epsilon > 0$, se puede tomar en [3.3] r lo bastante grande de modo que $|a_n| < \epsilon$, lo cual implica que $a_n = 0$ para $n = 1, 2, \ldots$, que era lo que se quería demostrar.

Nota. Una función que es holomorfa en todo el plano complejo se suele llamar una ***función entera.*** De acuerdo con el teorema de Liouville, toda función entera y no constante no es acotada en $\mathbb{C}$. De esto resulta, en particular, que todo polinomio de grado $n \geq 1$ no es acotado en $\mathbb{C}$.

Una Aplicación del Teorema de Liouville: el Teorema Fundamental del Algebra

A continuación demostraremos que todo polinomio $P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$ de grado $n \geq 1$ y de coeficientes complejos posee por lo menos una raíz compleja.

Sea R un número positivo lo bastante grande para que $|\frac{a_1}{z} + \ldots + \frac{a_n}{z^n}| \leq \frac{1}{2}$ para $|z| \geq R$. De esto resulta que si $|z| \geq R$.

$$\left|1 + \frac{a_1}{z} + \ldots + \frac{a_n}{z^n}\right| \geq 1 - \left|\frac{a_1}{z} + \ldots + \frac{a_n}{z^n}\right| \geq \frac{1}{2}.$$

Por consiguiente

$$|P(z)| = \left|z^n \left(1 + \frac{a_1}{z} + \ldots + \frac{a_n}{z^n}\right)\right| \geq \frac{R^n}{2} \text{ con tal que } |z| \geq R. \qquad [3.4]$$

A fin de demostrar el teorema probaremos que si $P(z)$ no se anula en ningún punto, P es igual a una constante, lo cual no es posible porque el grado de P es mayor o igual a uno.

En efecto, si $P(z) \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$, la función $f(z) = \frac{1}{P(z)}$ es holomorfa en todo $\mathbb{C}$ (véase teorema 1, cap. 2, § 3). Por otra parte, en virtud de [3. 4] f es acotada para $|z| \geq R$, ya que $|f(z)| = \frac{1}{|P(z)|} \leq \frac{2}{R^n}$. Como f es continua en el conjunto compacto $\{z \mid |z| \leq R\}$, f es también acotada para $|z| \leq R$ (corolario del teorema 3, cap. 2, § 2). Por consiguiente f es acotada en $\mathbb{C}$, y de acuerdo con el teorema de Liouville, $f(z) = \frac{1}{P(z)}$ es igual a una constante, de lo cual resulta que P es también una constante, que es la contradicción a que se deseaba llegar.

5

EL CALCULO DE RESIDUOS

§ 1. El Teorema de Laurent

Supongamos que f sea una función holomorfa para todo z tal que $0 < |z - z_0| < \rho_2$, $(\rho_2 > 0)$. De acuerdo con el teorema 2, cap. 2, §4, si f no es holomorfa en z_0, entonces f no se puede representar como una serie de potencias en el círculo $|z - z_0| < \rho_2$. No obstante esto, el matemático francés Laurent logró demostrar en 1843 que en todo anillo

$$A(z_0; \rho_1, \rho_2) = \{z \mid 0 < \rho_1 < |z - z_0| < \rho_2\}$$

alrededor de z_0, se puede representar f como la suma *dos* series de potencias, de las cuales una es una serie de potencias de $(z - z_0)$ y la otra una serie de potencias de $(z - z_0)^{-1}$. Más exactamente, el teorema de Laurent afirma:

Teorema 1. Sea f una función holomorfa en un anillo $A(z_0; \rho_1, \rho_2)$ alrededor de un punto z_0. Entonces, para todo $z \in A(z_0; \rho_1, \rho_2)$ se cumple

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z) \qquad [1.1]$$

en donde

$$f_1(z) = \sum_{0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \qquad \text{y} \qquad f_2(z) = \sum_{-1}^{\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n}$$

Los coeficientes están dados por

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots), \qquad [1.2]$$

en donde el camino de integración es cualquier circunferencia $|\zeta - z_0| = r$, $\rho_1 < r < \rho_2$, orientada positivamente.

Además, la función f_1, llamada la *parte regular* de f en z_0, es holomorfa en el círculo $|z - z_0| < \rho_2$, y la función f_2, la *parte prin-*

cipal de f en z_0, es holomorfa en $|z-z_0| > \rho_1$.

Nota. La suma $\sum_0^\infty a_n (z-z_0)^n + \sum_1^\infty a_{-n} (z-z_0)^{-n}$ se suele escribir en la forma $\sum_{-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$, y se llama el ***desarrollo de Laurent***, de f en el punto z_0. Cuando f es holomorfa en el círculo $|z-z_0| < \rho_2$, el desarrollo de Laurent se convierte en el desarrollo de Taylor, ya que para $n = -1, -2, \ldots$ las funciones $\dfrac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}$ son holomorfas en dicho círculo, de modo que, de acuerdo con el teorema integral de Cauchy, en [1.2] se obtiene $a_n = 0$, $n = -1, -2, \ldots$.

La demostración del teorema de Laurent, la cual no damos aquí, se puede encontrar en textos como los citados en las referencias bibliográficas (1)-(3) y (5). Igualmente, podrá el lector cerciorarse de la *unicidad* del desarrollo de Laurent de una función f en un anillo $A(z_0; \rho_1, \rho_2)$, lo cual significa lo siguiente: si f está representada en $A(z_0; \rho_1, \rho_2)$ por $\sum_{-\infty}^{\infty} b_n (z-z_0)^n$, los coeficientes b_n coinciden con los a_n dados por la fórmula [1.2], o sea que $\sum_{-\infty}^{\infty} b_n (z_0)^n$ es el desarrollo de Laurent de f en z_0.

Ejemplo. Sea $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$. Como f es holomorfa en el anillo $1 < |z| < 2$, f se puede representar en dicho anillo por medio de una serie de Laurent $\sum_{-\infty}^{\infty} a_n z^n$. El cálculo de los coeficientes se simplifica mucho en este caso si en vez de utilizar la fórmula [1.2] se sigue el procedimiento siguiente, basado en la unicidad del desarrollo de Laurent. Primero expresamos f en la forma

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = -\frac{1}{(z-1)} + \frac{1}{(z-2)}. \qquad [1.3]$$

Teniendo en cuenta el ejemplo 4, cap. 1, §3, se obtiene:

$$\frac{1}{(z-1)} = \frac{\frac{1}{z}}{(1-\frac{1}{z})} = \frac{1}{z}\sum_0^\infty \left(\frac{1}{z}\right)^n = \sum_1^\infty \frac{1}{z^n} \quad \text{para} \quad |z| > 1,$$

$$\frac{1}{z-2} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{z}{2}} = -\frac{1}{2}\sum_0^\infty \left(\frac{z}{2}\right)^n \quad \text{para} \quad |z| < 2.$$

Por consiguiente, se tiene para $1 < |z| < 2$.

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \sum_{1}^{\infty} (-1)\frac{1}{z^n} + \sum_{0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2^{n+1}}\right) z^n = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n z^n, \qquad [1.4]$$

en donde $a_n = -1$, para $n = -1, -2, -3, \ldots$; $a_n = -\frac{1}{2^{n+1}}$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$ (Recuerde el lector verificar que estos valores coinciden con los dados por la fórmula [1.2]).

En este caso, la parte regular de f en el origen está dada por la función $f_1(z) = \sum_{0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2^{n+1}}\right) z^n$, y la parte principal, por la función $f_2(z) = \sum_{1}^{\infty} (-1) z^{-n}$.

§ 2. Polos y Residuos

Llamemos *vecindad punteada* de un punto z_0 a todo conjunto de la forma $V'_\rho(z_0) = \{z \mid 0 < |z - z_0| < \rho\}$, en donde $\rho > 0$. Una vecindad punteada de z_0 no es otra cosa que una vecindad circular de z_0 de la cual se excluye el punto z_0.

Si f es una función holomorfa en una vecindad punteada $V'_\rho(z_0)$ de z_0, pero no en el punto z_0 mismo, entonces z_0 se llama un *punto singular de* f.

De acuerdo con el teorema de Laurent, en todo anillo $r < |z - z_0| < \rho$ $(0 < r < \rho)$ la función f se puede representar por medio de una serie de Laurent $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$. Como r se puede tomar tan pequeño como se quiera, dicha serie representa a f en $V'_\rho(z_0)$ y por eso se le llama el desarrollo de Laurent de f en $V'_\rho(z_0)$. Basado en esto damos a continuación la siguiente definición.

Definición. Sea f una función holomorfa en una vecindad punteada $V'_\rho(z_0)$ de z_0. El punto singular z_0 se llama un *polo de orden* m de f si el desarrollo de Laurent de f en $V'_\rho(z_0)$ es de la forma

$$f(z) = \frac{a_m}{(z-z_0)^m} + \frac{a_{m-1}}{(z-z_0)^{m-1}} + \ldots + \frac{a_1}{z-z_0} + \sum_{0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \quad (a_m \neq 0) \quad [2.1]$$

Esto quiere decir que z_0 es un polo de orden m de f si, y sólo si, la parte principal f_1 de f sólo contiene un número finito de términos y es de la forma

$$f_1(z) = \frac{a_m}{(z-z_0)^m} + \frac{a_{m-1}}{(z-z_0)^{m-1}} + \ldots + \frac{a_1}{z-z_0} \qquad (a_m \neq 0).$$

Ejemplo 1. Los puntos $z = 1$, $z = 2$ son polos de primer orden de la función $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ considerada en la sección anterior. En efecto, usando la descomposición [1.3] se obtiene, por un lado,

$$f(z) = -\frac{1}{z-1} - \frac{1}{1-(z-1)} = -\frac{1}{z-1} + \sum_{0}^{\infty} (-1)(z-1)^n \quad (0 < |z-1| < 1) \tag{2.2}$$

y por otro,

$$f(z) = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{1-(2-z)} = \frac{1}{z-2} + \sum_{0}^{\infty} (-1)^{n+1}(z-2)^n \quad (0 < |z-2| < 1) \tag{2.3}$$

Ejemplo 2. La función

$$f(z) = e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!}\frac{1}{z^2} + \dots + \frac{1}{n!}\frac{1}{z^n} + \dots$$

(véase ejercicio 2, cap. 4, §2), está definida para todo $|z| > 0$, sin embargo el origen, a pesar de ser un punto singular no es un polo de esta función, ya que la parte principal de f contiene un número infinito de términos.

Supongamos que z_0 sea un polo de orden m de una función f. El coeficiente a_{-1} que multiplica $(z - z_0)^{-1}$ se llama el ***residuo*** de f en el punto z_0, y se denota por el símbolo $\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)$.

Por ejemplo, de acuerdo con [2.2] y [2.3], se tiene para la función

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}:$$

$$\operatorname*{Res}_{z=1} f(z) = -1, \qquad \operatorname*{Res}_{z=2} f(z) = 1. \tag{2.4}$$

De la fórmula [1.2] resulta (para $n = -1$)

$$\int_{|\zeta - z_0| = r} f(\zeta)d\zeta = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z), \tag{2.5}$$

en donde la circunferencia $|\zeta - z_0| = r$ se considera orientada positivamente y $0 < r < \rho$. Como consecuencia de [2.4] y de [2.5] se obtiene en particular

$$\int_{|z-1|=r} \frac{1}{(z-1)(z-2)}\,dz = -2\pi i, \qquad \int_{|z-2|=r} \frac{1}{(z-1)(z-2)}\,dz = 2\pi i$$

para $0 < r < 1$.

Teorema 1. Supongamos que f sea holomorfa en una vecindad punteada $V'_\rho(z_0)$ del punto z_0. Condición necesaria y suficiente para que z_0 sea un polo de orden m de f es que la función $g(z) = (z - z_0)^m f(z)$ satisfaga la condición

$$\lim_{z \to z_0} g(z) \neq 0 \qquad [2.6]$$

Además, si z_0 es un polo de orden m de f, su residuo en ese punto está dado por la fórmula

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\, g(z). \qquad [2.7]$$

En particular, si z_0 es un polo de primer orden, se tiene

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z \to z_0} [(z-z_0)f(z)]. \qquad [2.8]$$

En vez de dar una demostración de este teorema, ilustraremos su aplicación con unos ejemplos.

Ejemplo 3. Ya hemos visto que los puntos $z = 1$, $z = 2$ son polos de primer orden de $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$. De acuerdo con [2.8], se tiene

$$\operatorname*{Res}_{z=1} f(z) = \lim_{z \to 1} \frac{1}{z-2} = -1, \qquad \operatorname*{Res}_{z=2} f(z) = \lim_{z \to 2} \frac{1}{z-1} = 1,$$

lo cual coincide con [2.4].

Ejemplo 4. La función $f(z) = \frac{1}{z^2}$ tiene un polo de segundo orden en el origen, ya que la función $g(z) = z^2 \cdot f(z) = 1$ satisface $\lim_{z \to 0} g(z) = 1$. Además, según [2.7], se tiene

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = \lim_{z \to 0} \frac{d}{dz}\, 1 = 0.$$

§ 3. Cálculo de Integrales por el Método de los Residuos

Cauchy fue el primer matemático en darse cuenta de las múltiples aplicaciones de la teoría de los residuos. Todas ellas están basadas en el siguiente teorema, que es una generalización de la fórmula [2.5].

Teorema 1. (Teorema residual de Cauchy). Sea Γ un camino simple cerrado orientado positivamente, y f una función holomorfa tanto en Γ como en su interior, con la excepción de un número finito de puntos $z_1, \ldots, z_n$ en el interior de Γ. Entonces se cumple

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{k=1} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z) \qquad [3.1]$$

(Véase su demostración en las referencias bibliográficas (1)-(3), (5).

Aplicaciones al Cálculo de Integrales

1) Calculemos el valor de la integral

$$I = \int_{|z|=2} \frac{2z}{z^2+1}\, dz$$

por el método de los residuos. La función $f(z) = \dfrac{2z}{z^2+1}$ tiene como polos de primer orden los puntos $z = \pm i$ y, en virtud de [2.8], se tiene

$$\operatorname*{Res}_{z=i} f(z) = \lim_{z\to i} (z-i)\, f(z) = 1, \quad \operatorname*{Res}_{z=-i} f(z) = \lim_{z\to -i} (z+i)\, f(z) = 1.$$

Como los puntos $z = \pm i$ son interiores a la circunferencia $|z| = 2$, de [3.1] resulta: $I = 2\pi i\,(1+1) = 4\pi i$.

2) Sea $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+\cos\theta}$, en donde a es un número real $|a| > 1$. A fin de determinar el valor de I por el método de los residuos expresamos I como una integral a lo largo de la circunferencia unidad $z = e^{i\theta}$, $0 \le \theta \le 2\pi$. Como

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} = \frac{e^{2i\theta}+1}{2e^{i\theta}} = \frac{z^2+1}{2z},$$

se obtiene

$$\frac{1}{a+\cos\theta} = \frac{2z}{z^2+2az+1}.$$

Por consiguiente, tomando $f(z) = \dfrac{2}{i\,(z^2 + 2az + 1)}$ obtenemos

$$I = \int_{|z| = 1} f(z)\,dz$$

La función f sólo tiene como polos de primer orden los puntos en donde $z^2 + 2az + 1 = 0$, los cuales son

$$z_1 = -a + \sqrt{a^2 - 1}\,, \qquad z_2 = -a - \sqrt{a^2 - 1}\,.$$

Como z_1 y z_2 son números reales tales que $z_1 z_2 = 1$, uno de ellos tiene que ser menor que 1 en valor absoluto, de modo que la circunferencia unidad contiene siempre un polo, y uno solo, de f.

Consideremos el caso $a > 1$: como $|z_2| > 1$, se debe tener $|z_1| < 1$. De acuerdo con [3. 1] y teniendo en cuenta que $z^2 + 2az + 1 = (z - z_1)(z - z_2)$ se obtiene:

$$I = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z = z_1} f(z) = 2\pi i \lim_{z \to z_1} \frac{2(z - z_1)}{i\,(z^2 + 2az + 1)} =$$

$$= 2\pi i \lim_{z \to z_1} \frac{2}{i\,(z - z_2)} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}\,.$$

Cuando $a < -1$ se tiene $|z_2| < 1$, y se verifica que $I = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z = z_2} f(z) = -\dfrac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}$.

§ 4. El Teorema de Rouché. Tercera Demostración del Teorema Fundamental del Algebra

La noción de cero o raíz de una función es ampliamente conocida: un punto z_0 se dice que es un cero de una función f si ésta está definida en el punto z_0 y $f(z_0) = 0$. Si la función f es holomorfa en el punto z_0, entonces es posible definir lo que se entiende por orden o multiplicidad del cero z_0. En efecto, como existe una vecindad V de z_0 en la cual f se puede representar por medio de su desarrollo de Taylor en la forma

$$f(z) = \sum_{0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \qquad a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \qquad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots \qquad [4.1]$$

la condición $f(z_0)$ implica que el coeficiente a_0 es igual a cero. Si $a_0 = a_1 = \ldots = a_{m-1} = 0$ y $a_m \neq 0$, entonces [4. 1] se reduce a

$$f(z) = \sum_{n=m}^{\infty} a_n (z-z_0)^n = a_m (z-z_0)^m + a_{m+1}(z-z_0)^{m+1} + \dots \qquad [4.2]$$

o sea que

$$f(z) = (z-z_0)^m g(z) , \qquad [4.3]$$

en donde $g(z) = a_m + a_{m+1}(z-z_0) + \dots$ es una función holomorfa en z_0 con $g(z_0) = a_m \neq 0$.

Definición. Una función f holomorfa en un punto z_0 se dice que posee *un cero de orden* m *(o de multiplicidad* m*)* en el punto z_0 si el desarrollo de Taylor de f en ese punto está dado por [4.2].

De esta definición y de [4.3] resulta que z_0 es un cero de orden m de f si, y sólo si, [4.3] se cumple, con g holomorfa en z_0 y $g(z_0) \neq 0$. En particular, si f es un polinomio $P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$ de grado $n \geq 1$, entonces $z_0 \in \mathbb{C}$ es un cero de orden $m \leq n$ de P si, y sólo si,

$$P(z) = (z-z_0)^m Q(z) ,$$

en donde Q es un polinomio de grado $n-m$ y $Q(z_0) \neq 0$.

Sea Γ el camino cerrado $z = z(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, y f una función holomorfa a lo largo de Γ y tal que $f(z) \neq 0$ para todo $z \in \Gamma$. Denotemos con C el conjunto imagen de Γ bajo f, $C = f(\Gamma)$, es decir, C es el camino $w = f[z(t)]$, $\alpha \leq t \leq \beta$. Como f no se anula sobre Γ, el camino C no pasa por el origen y por consiguiente se puede considerar el índice de C con respecto al origen:

$$I(C, 0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{dw}{w}.$$

Teorema 1. Sea Γ un camino simple y cerrado orientado positivamente y f una función holomorfa tanto en Γ como en su interior, con la excepción de un número finito de puntos interiores $b_1, \dots, b_q$, en los cuales f posee polos de orden $n_1, \dots, n_q$, respectivamente. Si f no se anula en Γ, y si en el interior de Γ los puntos $a_1, \dots, a_p$ son ceros de f, de orden $m_1, \dots, m_p$, respectivamente, entonces

$$I(C, 0) = M - N , \qquad [4.4]$$

en donde $C = f(\Gamma)$, $M = \sum_{k=1}^{p} m_k$, $N = \sum_{k=1}^{q} n_k$.

Nota. La expresión M - N en [4. 4] no es otra cosa que la diferencia entre el número de ceros y el número de polos que posee f en el interior de Γ, cada cero y cada polo contado tantas veces de acuerdo con su orden.

En vez de demostrar el teorema anterior (véase su demostración en las obras citadas en las referencias bibliográficas (1)-(3) o (5)), vamos a derivar de él el muy útil resultado:

Teorema 2 (Teorema de Rouché). Sea Γ un camino simple y cerrado orientado positivamente, y f, g dos funciones holomorfas tanto en Γ como en su interior. Si $|g(z)| < |f(z)|$ para todo $z \in \Gamma$, entonces la función $f + g$ posee en el interior de Γ tantos ceros como la función f.

Demostración. En primer lugar, de $|g(z)| < |f(z)|$ en Γ resulta $f(z) \neq 0$, $f(z) + g(z) \neq 0$ para todo $z \in \Gamma$. Denotemos con C_1, C_2 y C los caminos $C_1 = g(\Gamma)$, $C_2 = f(\Gamma)$, $C = (f+g)(\Gamma)$, o sea que para $t \in [\alpha, \beta]$

$$\begin{aligned} w \in C_1 &: \ w = w_1(t) = g[z(t)] \\ w \in C_2 &: \ w = w_2(t) = f[z(t)] \\ w \in C \ &: \ w = w(t) \ \ = w_1(t) + w_2(t) \end{aligned}$$

Como f y $f + g$ no poseen polos en el interior de Γ, del teorema 1 resulta

$$I(C,\ 0) = M, \qquad I(C_2,\ 0) = M_2, \qquad [4.5]$$

en donde M es el número de ceros de $f + g$, y M_2 el número de ceros de f en el interior de Γ. Como, por otra parte, $|w_1(t)| < |w_2(t)|$ para todo $t \in [\alpha, \beta]$, se obtiene de [4. 5] y del teorema 4, cap. 3, §2, la relación $M_2 = M$, lo cual demuestra el teorema.

Una de las aplicaciones más importantes del teorema de Rouché es la demostración, en forma sencilla, de que todo polinomio $P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$ de grado $n \geq 1$ con coeficientes complejos posee exactamente n ceros o raíces, lo cual nos da una nueva demostración del teorema fundamental del Algebra. En efecto, tomemos $f(z) = z^n$, $g(z) = a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$. Si R es un número positivo suficientemente grande, entonces se tiene

$$\left|\frac{a_1}{z} + \dots + \frac{a_n}{z^n}\right| < 1 \qquad \text{para todo } z,\ |z| \geq R,$$

de lo cual resulta que para todo $|z| \geq R$, y en particular para todo punto z de la circunferencia $\Gamma = \{z \mid |z| = R\}$

$$|g(z)| = |a_1 z^{n-1} + \dots + a_n| = |z|^n \left|\frac{a_1}{z} + \dots \frac{a_n}{z^n}\right| < |z|^n = |f(z)|.$$

Por consiguiente, en virtud del teorema de Rouché, el polinomio $P = f + g$ posee en el interior de Γ tantos ceros como $f(z) = z^n$. Como, por otra parte, f posee sólo un cero, a saber $z = 0$, y éste es de orden n, se obtiene que P tiene n ceros en el círculo $|z| < R$. Debido a que $|P(z)| \geq |f(z)| - |g(z)| > 0$ para $|z| \geq R$, todos los ceros de P se encuentran en el círculo $|z| < R$ y, por lo tanto, P posee exactamente n ceros.

Ejercicio

Sea f una función holomorfa en un dominio D que contiene el disco cerrado $\{z \mid |z| \leq 1\}$. Demostrar que si $|f(z)| < 1$ para $|z| = 1$, entonces existe un punto z_0 único, $|z_0| < 1$, tal que $f(z_0) = z_0$.

BIBLIOGRAFIA

(1) AHLFORS, L. V. Complex Analysis, McGraw-Hill, Nueva York, N. Y. (1953).

(2) APOSTOL, T. M. Mathematical Analysis, Addison-Wesley, Reading, Mass. (1957).

(3) CARTAN, H. Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes, Hermann, París (1961).

(4) HORVÁTH, J. Introducción a la Topología General, monografía No. 9, serie de matemática, Departamento de Asuntos Científicos, Unión Panamericana, OEA, Washington, D. C. (en preparación).

(5) PENNISI, L. L. Elements of Complex Variables, Holt, Rinehart and Winston, Nueva York, N. Y. (1963).

COLECCION DE MONOGRAFIAS CIENTIFICAS

Publicadas

Serie de Matemática

N° 1. La Revolución en las Matemáticas Escolares, por el Consejo Nacional de Maestros de Matemáticas de los Estados Unidos de América
N° 2. Espacios Vectoriales y Geometría Analítica, por Luis A. Santaló.
N° 3. Estructuras Algebraicas, por Enzo R. Gentile.
N° 4. Historia de las Ideas Modernas en la Matemática, por José Babini.
N° 5. Algebra Lineal, por Orlando E. Villamayor.
N° 7. El Concepto de Número, por César A. Trejo.
N° 8. Funciones de Variable Compleja, por José I. Nieto.

Serie de Física

N° 1. Concepto Moderno del Núcleo, por D. Allan Bromley.
N° 2. Panorama de la Astronomía Moderna, por Félix Cernuschi y Sayd Codina.
N° 3. La Estructura Electrónica de los Sólidos, por Leopoldo M. Falicov.

Serie de Química

N° 1. Cinética Química Elemental, por Harold Behrens Le Bas.
N° 2. Bioenergética, por Isaias Raw y Walter Colli.
N° 3. Macromoléculas, por Alejandro C. Paladini y Moisés Burachik.
N° 4. Mecanismos de las Reacciones Orgánicas, por Jorge Brieux.
N° 5. Elementos Encadenados, por Jacobo Gómez Lara.

Serie de Biología

N° 1. La Genética y la Revolución en las Ciencias Biológicas, por José Luis Reissig.
N° 2. Bases Ecológicas de la Explotación Agropecuaria en la América Latina, por Guillermo Mann F.

N° 3. La Taxonomía y la Revolución en las Ciencias Biológicas, por Elías R. de la Sota.

N° 4. Principios Básicos para la Enseñanza de la Biología, por Oswaldo Frota-Pessoa.
N° 5. A Vida da Célula, por Renato Basile.
N° 6. Microorganismos, por J. M. Gutiérrez-Vázquez.

En preparación

Serie de Matemática

Algebra Linear e Geometria Euclidiana, por Alexandre Martins Rodrigues.
Funções Reais de Variável Real, por Djairo Guedes de Figueiredo.
Introducción a la Topología General, por Juan Horváth.

Serie de Física

Fôrças Nucleares, por Oscar Sala y A. F. R. de Toledo Piza.
Física de Partículas, por Igor Saavedra.
Física Nuclear, por Mariano Bauer E. y Alfonso Mondragón.
Física Cuántica, por Thomas A. Brody.
Empirismo y Teoría en la Formación y Evolución de Algunos Conceptos Físicos, por Félix Cernuschi.

Serie de Química

Enseñanza de la Química Experimental, por Francisco Giral.
Complejos, por Manuel Madrazo Garamendi.

Serie de Biología

Hereditariedade Humana, por P. H. Saldanha.

Nota. Las personas interesadas en adquirir estas obras deben dirigirse a la División de Ventas y Promoción, Unión Panamericana, Washington, D. C. 20006.